Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Экономика и управление проектами»

У9(2)26.я7
Е302

О.В. Егорова

Финансовая математика

Учебное пособие

Под редакцией Л.А. Баева

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2015

ББК У9(2)262.я7
Е302

Одобрено
учебно-методической комиссией
факультета экономики и управления

Рецензенты:
Васильева Л.А., Кузьминова А.Л.

Егорова, О.В.
Е302 Финансовая математика: учебное пособие / О.В. Егорова, под ред. Л.А. Баева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015.– 33 с.

Учебное пособие предназначено для студентов направления подготовки «Экономика» по дисциплине «Финансовая математика»; направления подготовки «Менеджмент» по дисциплине «Финансовая математика».

В учебном пособии рассмотрены общетеоретические основы дисциплины, перечень вопросов для проверки знаний по каждому разделу дисциплины, примеры решения задач, а также перечень вопросов для подготовки к экзамену.

ББК У9(2)262.я7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Любая финансовая, кредитная или коммерческая операция предполагает совокупность условий, согласованных её участниками. Совместное влияние на финансовую операцию многих факторов делает конечный ее результат неочевидным. Для его оценивания необходим специальный количественный анализ. Именно поэтому, такие операции могут и должны являться предметом количественного финансового анализа. Совокупность методов расчета и составляет предмет курса «Финансовая математика».

В рамках данного курса рассматриваются методы финансово-экономических расчетов для решения широкого круга задач от элементарного начисления процентов до анализа сложных инвестиционных, кредитных и коммерческих операций.

Цель курса состоит в изучении методов количественного анализа, необходимых для принятия финансовых решений в условиях современного рынка.

В процессе изучения курса «Финансовая математика» решаются следующие задачи:

1. Овладение основными принципами и методами анализа одиночных выплат и потоков платежей;
2. Понимание финансовой эквивалентности платежей;
3. Изучение современных моделей оценивания производных финансовых инструментов;
4. Применение изученных методов при анализе ценных бумаг, при решении кредитных и коммерческих задач.

Учебное пособие предназначено для студентов направления подготовки «Экономика» по дисциплине «Финансовая математика»; направления подготовки «Менеджмент» по дисциплине «Финансовая математика».

В учебном пособии рассмотрены общетеоретические основы дисциплины, перечень вопросов для проверки знаний по каждому разделу дисциплины, примеры решения задач.

Содержание данного пособия полностью соответствует требованиям Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования:

№ 747 от 27.12.2009 г. направление подготовки 080100 – «Экономика» (квалификация «Бакалавр») по дисциплине «Финансовая математика»;

№ 544 от 20.05.2010 г. направление подготовки 080200 – «Менеджмент» (квалификация «Бакалавр») по дисциплине «Финансовая математика».

Изучение курса студентами направления подготовки 080100 – «Экономика» (квалификация (степень) «Бакалавр»), дисциплина «Финансовая математика» способствует формированию у студента следующих компетенций:

Профессиональные:

– способен на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-2);

– способен выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК-3);

– способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);

– способен выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5).

Изучение курса студентами направления подготовки 080200 – «Менеджмент» (квалификация (степень) «Бакалавр»), дисциплина «Финансовая математика» способствует формированию у студента следующих компетенций:

Профессиональные:

– способен оценивать влияние инвестиционных решений и решений по финансированию на рост ценности (стоимости) компании (ПК-12);

– умеет применять количественные и качественные методы анализа при принятии управленческих решений и строить экономические, финансовые и организационно-управленческие модели (ПК-31);

– способен анализировать финансовую отчетность и принимать обоснованные инвестиционные, кредитные и финансовые решения (ПК-40);

– владеет техниками финансового планирования и прогнозирования (ПК-45).

В результате освоения дисциплины студент должен:

а) знать:

- концепцию стоимости денег во времени;
- основные понятия финансовой математики;
- основные методы финансовой математики.

б) уметь:

- использовать систему знаний о методах количественного анализа для принятия финансовых решений;
- осуществлять аналитические исследования, необходимые для обеспечения успешной деятельности хозяйствующих субъектов на финансовых рынках.

в) владеть:

- техниками финансового планирования и прогнозирования;
- количественными методами анализа при принятии управленческих решений.

После освоения теоретического материала, студентами дневной и заочной формы обучения, выполняется контрольная работа.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ДИСЦИПЛИНЫ

Предмет финансовой математики

Финансовая математика – это дисциплина, в рамках которой изучаются методы математических расчётов, применяемых в финансовых операциях.

Объектом изучения являются любые финансово-кредитные операции, которые предполагают наличие ряда условий, с которыми согласны участвующие стороны. К таким условиям относятся:

– денежные суммы;
– временные параметры;
– процентные ставки и некоторые другие дополнительные величины.

Каждая из перечисленных характеристик может быть представлена самым различным способом.

1) <u>платежи</u> могут быть:
   – разовые;
   – в рассрочку;
   – постоянные;
   – переменные и т.д.
2) <u>время</u> может обозначать:
   – общий срок операции;
   – интервалы поступления платежей;
   – момент погашения задолженности.
3) <u>процентные ставки</u> бывают:
   – фиксированные;
   – переменные;
   – номинальные;
   – эффективные и т.д.

В рамках одной операции эти параметры образуют некоторую взаимосвязанную систему. Множественность параметров этой системы, приводит к тому, что конечные результаты операций (кроме элементарных) часто не очевидны. Более того, изменение значения хотя бы одной величины в системе, обязательно скажется на финансовых результатах соответствующей операции. В связи с этим возникает потребность в количественном финансовом анализе таких операций.

К основным задачам финансовой математики относятся следующие:

1) измерение конечных финансовых результатов операции для каждой из участвующих сторон;
2) разработка планов выполнения финансовых операций, в том числе планов погашения задолженности;
3) измерение зависимости конечных результатов операции от основных ее параметров;
4) расчет параметров эквивалентного (безубыточного) изменения первоначальных условий операции.

При анализе финансовых операций необходимо учитывать влияние фактора времени на денежные суммы. *Фактор времени* особенно в долгосрочных операциях, играет не меньшую, а иногда даже большую роль, чем размер денежных сумм.

Необходимость учета временного фактора вытекает из сущности финансирования, кредитования и инвестирования и выражается в первом принципе финансовой математики.

Первый принцип финансовой математики: *принцип неравноценности денег, относящихся к разным моментам времени.* Т.е. две одинаковые по абсолютной величине, но разновременные суммы – неравноценны. Это обусловлено, во-первых, способностью денег приносить доход, а во-вторых, влиянием инфляции.

Из первого принципа финансовой математики следует, что неправомерно сравнивать денежные суммы, относящиеся к разным моментам времени.

Для сравнения денежных сумм, полученных или затраченных в разные моменты времени их необходимо привести к одному моменту времени (базовой дате). Приведение осуществляется наращением, если базовая дата относится к будущему или дисконтированием – приведение к более ранней дате (рис. 1).

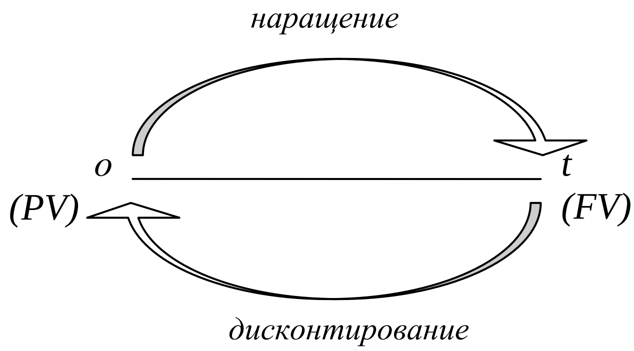


Рис. 1. Приведение денежных сумм

PV (present value) – текущая (современная) величина денежной суммы;
FV (future value) – будущая (наращенная) величина денежной суммы;
$D = (FV – PV)$ – дисконт.

Второй принцип финансовой математики: *принцип финансовой эквивалентности,* который предполагает равенство (эквивалентность) финансовых обязательств, сторон принимающих участие в операции. Этот принцип позволяет изменять условия контрактов без нарушения принятых обязательств.

Основные понятия

<u>*Проценты*</u> (процентные деньги) – абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой его форме:
– выдача ссуды;
– продажа товара в кредит;
– помещение денег на депозитный счет и т.д.

Процентная ставка – относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени – отношение дохода (процентных денег) к основной сумме долга.

Период начисления – временной интервал, к которому приурочена процентная ставка (чаще всего на практике имеют дело с годовыми ставками).

Проценты согласно договорённости между кредитором и заёмщиком выплачиваются по мере их начисления или присоединяются к основной сумме долга.

Капитализация процентов – это присоединение начисленных процентов к основной сумме долга.

Наращение – процесс увеличения суммы денег во времени в связи с присоединением процентов.

Дисконтирование (сокращение) – это процесс уменьшения суммы денег, относящейся к будущему, в связи с учётом процентов.

Дисконт (скидка) – величина учтённых процентов.

Любая из операций, как наращения, так и дисконтирования, невозможна без применения определенного уровня процентной ставки и схемы начисления процентов. Начисление процентов возможно по схеме простого процента, либо по схеме сложного процента.

Проценты

Простые	***Сложные***
применяются для краткосрочных операций	применяются в средне- и долгосрочных операциях

Процессы начисления простых и сложных процентов будут рассмотрены в следующих разделах.

Контрольные вопросы

1. Объект, предмет, цели и задачи курса.
2. Основные понятия дисциплины.
3. Концепция изменения стоимости денег во времени.

1.1. Тема 1 «Наращение по простым процентам»

При наращении по простым процентам, начисленные проценты не присоединяются к основной сумме долга, а периодически выплачиваются. База для начисления процентов остается постоянной, и процесс роста исходной суммы происходит равномерно.

По определению, *наращенная сумма* – это первоначальная сумма с начисленными к концу срока процентами. В случае начисления простых процентов, наращенная сумма определяется по формуле:

$$FV = PV(1 + nr), \qquad (1)$$

где PV – первоначальная сумма долга; FV – наращенная сумма, т.е. сумма в конце срока; r – ставка наращения процентов (десятичная дробь); n – срок ссуды.

$(1+nr)$ – <u>*множитель наращения*</u> простых процентов, который показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной.

Если срок операции n выражен в днях, а процентная ставка годовая, то n можно представить в виде дроби:

$$n = \frac{t}{K}, \tag{2}$$

где t – число дней ссуды; K – *временная база начисления процентов.*

Тогда формула наращения простых процентов примет вид:

$$FV = PV(1+\frac{t}{K}r). \tag{3}$$

При расчете простых процентов применяют два вида временной базы.

<u>***Временная база***</u>

***K_1*=365, 366** дней | ***K_2*=360** дней (12 месяцев по 30 дней)

<u>***точные проценты***</u> | <u>***обыкновенные проценты***</u>

Число дней операции t может быть:

– ***точное***, рассчитанное строго по календарю;

– ***приближенное***, определяется исходя из предположения, что все месяцы в году равны между собой (по 30 дней).

В зависимости от применяемой временной базы и способа расчета t, возможны <u>три варианта расчета простых процентов:</u>

1. Английская методика:
(365/365) – точные проценты с точным числом дней ссуды;
2. Французская методика:
(360/365) – обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;
3. Германская методика:
(360/360) – обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Переменные (плавающие) ставки

В некоторых случаях в кредитных соглашениях предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае в контракте указывается не сама ставка, а база (базовая ставка) и размер надбавки к ней (маржа). Наращенная сумма по переменным ставкам определяется по формуле (4):

$$FV = PV(1+n_1r_1+n_2r_2+...+n_tr_t+...+n_mr_m) = PV(1+\sum_t n_tr_t), \tag{4}$$

где r_t – ставка простых процентов в периоде t; n_t – продолжительность периода с постоянной ставкой, $n=\sum_t n_t$.

Контрольные вопросы

1. Как изменяется базовая сумма при начислении простых процентов?
2. Формула наращения по простой процентной ставке;
3. Что такое множитель наращения и что показывает?
4. Методики начисления простых процентов;
5. Что такое переменные (плавающие) ставки, формула наращения.

1.2. Тема 2 «Наращение по сложным процентам»

При использовании схемы сложного процента, начисленные проценты не выплачиваются сразу, а присоединяются к основной сумме долга. Т. е. проценты начисляются и на начисленные проценты – цепной процесс. В этом случае, база для начисления процентов увеличивается с каждым шагом во времени и процесс увеличения исходной суммы происходит с ускорением.

Формула наращения по сложным процентам имеет следующий вид:

$$FV = PV(1+r)^n, \qquad (5)$$

где PV – первоначальная сумма; FV – наращенная сумма, т.е. сумма в конце срока; r – сложная процентная ставка (десятичная дробь); n – срок операции.

Величину $(1+r)^n$ называют *множитель наращения* по сложным процентам.

1.2.1. Переменные ставки сложных процентов

При наращении по сложным процентам в некоторых случаях применяются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки (плавающие ставки). В этом случае общий множитель наращения равен произведению частных множителей, и формула наращения имеет вид:

$$FV = PV(1+r_1)^{n_1}(1+r_2)^{n_2}...(1+r_k)^{n_k}, \qquad (6)$$

где $r_1, r_2, ..., r_k$ – последовательное значение ставок; $n_1, n_2, ..., n_k$ – периоды, в течение которых «работают» эти ставки.

1.2.2. Начисление процентов m раз в год

В современных условиях проценты капитализируются, как правило, не один, а несколько раз в году – по полугодиям, кварталам и т.д. В этом случае, для наращения применяется номинальная процентная ставка.

Номинальная ставка (j) – годовая ставка сложных процентов, доход по которой начисляется несколько m раз в год.

Т. е. каждый раз проценты начисляются по ставке j/m, а общее количество периодов наращения равно $m \cdot n$, и начисление процентов по номинальной ставке осуществляется по следующей формуле:

$$FV = PV\left(1+\frac{j}{m}\right)^N, \qquad (7)$$

где, j – номинальная процентная ставка; N – общее количество периодов начисления $(N = mn)$; m – количество раз начисления процентов в год.

Существует эффективная ставка эквивалентная номинальной.

Эффективная ставка – это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m - разовое начисление процентов в течение года по ставке j/m.

Эти ставки (номинальная и эффективная) ***эквивалентны*** в финансовом отношении, и могут заменять друг друга в рамках одной операции!

Эквивалентные ставки – это, ставки которые дают одинаковый результат за один и тот же промежуток времени.

Соотношение эквивалентности можно получить для любой пары ставок из равенства соответствующих множителей наращения.

Соотношение эквивалентности для эффективной и номинальной ставки имеет следующий вид:

$$(1+r)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}. \tag{8}$$

Отсюда, зная номинальную ставку можно определить эквивалентную ей эффективную ставку:

$$r = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1, \tag{9}$$

и наоборот, зная эффективную ставку, можно вычислить номинальную ставку при m - разовом начислении процентов в год по формуле (10):

$$j = m\left(\sqrt[m]{1+r} - 1\right). \tag{10}$$

Контрольные вопросы

1. Как изменяется база для начисления процентов при использовании схемы сложных процентов?
2. Что такое номинальная ставка, формула наращения по ней, в каких случаях применяется?
3. Понятие эффективной ставки;
4. Эквивалентность номинальной и эффективной ставки.

1.3. Тема 3 «Простые и сложные проценты»

1.3.1. Сравнение процесса роста по простым и сложным процентам

Для сравнения процесса роста исходной суммы по простым и сложным процентам достаточно сравнить соответствующие множители наращения. При одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей существенно зависят от срока.

Примем следующие обозначения:

r_s – ставку простых процентов (s «simple» – простой);

$(1+nr_s)$ – множитель наращения по простым процентам;

$(1+r)^n$ – множитель наращения по сложным процентам.

Если ставки годовые и срок выражен в годах, тогда:

– для срока $n<1$ простые проценты больше сложных: $(1+nr_s)>(1+r)^n$;

– для срока $n>1$ сложные проценты больше простых: $(1+nr_s)<(1+r)^n$;

– для срока $n=1$, множители наращения равны друг другу.

Представим графически процессы роста исходной суммы по простым и сложным процентам (рис. 2).

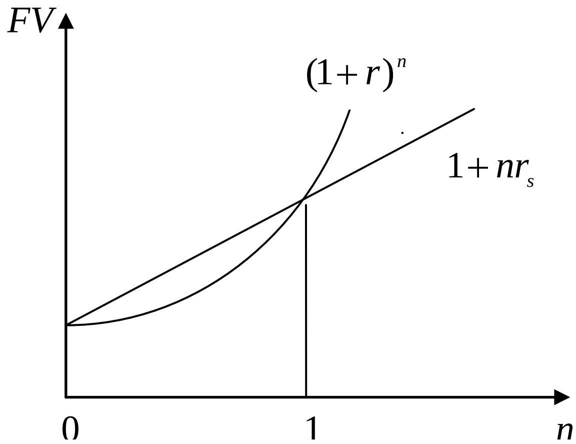


Рис. 2. Сравнение процесса роста по простым и сложным процентам

Аналогичные соотношения имеют место и при наращении процентов по периодам менее одного года. В этом случае r означает ставку за период, n – величину периода наращения. Например, если r – ставка за квартал, то при ежеквартальном начислении процентов для срока менее одного квартала простые проценты будут больше сложных.

1.3.2. Формулы удвоения

Более наглядно охарактеризовать влияние простой и сложной ставки можно, сопоставляя числа лет, необходимые для удвоения первоначальной суммы.

Формулы удвоения по простым и сложным процентам можно получить из соответствующих формул наращения (1) и (5), подставив $FV=2PV$. Тогда получаем формулы удвоения в виде:

– по простым процентам:

$$n=\frac{1}{r_s}, \tag{11}$$

– по сложным процентам:

$$n=\frac{\ln 2}{\ln(1+r)}=\frac{0{,}69315}{\ln(1+r)}, \tag{12}$$

где r_s – простая процентная ставка; r – сложная процентная ставка.

1.3.3. Начисление процентов за дробное число лет

В этом случае срок необходимо разложить на две составляющие: выделить целое количество периодов наращения и дробную часть одного такого периода, т. е. представить в виде:

$$n = n_1 + n_2, \tag{13}$$

где n_1 – количество целых периодов начисления; n_2 – дробная часть одного периода начисления.

Для расчета накопленной суммы, при начислении процентов за дробное число лет используются две схемы.

Схема сложного процента

В этом случае проценты за весь срок операции начисляются по сложным процентам, и накопленная сумма определяется по формуле:

$$FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n_1+n_2}, \tag{14}$$

где r – сложная годовая процентная ставка; m – количество раз начисления процентов в год.

Смешенная схема

По смешенной схеме за целое количество периодов наращения начисляются сложные проценты, за дробную часть периода – простые, по формуле:

$$FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{n_1} \cdot \left(1+\frac{r}{m}\cdot n_2\right). \tag{15}$$

Контрольные вопросы

1. Соотношение между простыми и сложными процентами;
2. Что показывают формулы удвоения?
3. В чем заключается смешенная схема начисления процентов.

1.4. Тема 4 «Дисконтирование»

Дисконтирование – нахождение величины денежной суммы на заданный момент времени t по известному или предполагаемому значению в будущем, исходя из значения процентной ставки.

В зависимости от вида применяемой ставки возможны два способа дисконтирования.

Дисконтирование

Математическое дисконтирование
(применяется процентная ставка, r)

Банковский учёт
(применяется учётная ставка, d)

1.4.1. Математическое дисконтирование

Задача, в этом случае формулируется так: какую первоначальную сумму ссуды надо выдать в долг, чтобы получить в конце срока сумму FV, при условии, что на долг начисляются проценты по ставке r?

Математическое дисконтирование по простым процентам

На основании формулы наращения простых процентов (1) получаем формулу математического дисконтирования в виде:

$$PV = \frac{FV}{1+nr}, \tag{16}$$

где $\frac{1}{1+nr}$ – *дисконтный множитель*, который показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной его сумме.

Математическое дисконтирование по сложным процентам

Дисконтирование по сложным процентам осуществляется с замедлением, т.к. каждый раз ставка применяется к сумме, дисконтированной на предыдущем этапе во времени. Обратившись к формуле наращения сложных процентов (5), получим формулу математического дисконтирования по сложным процентам:

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n}, \tag{17}$$

где $\frac{1}{(1+r)^n}$ – *дисконтный, учетный* или *дисконтирующий множитель* сложных процентов.

Для случаев, когда проценты начисляются m раз в год, формула математического дисконтирования будет следующей:

$$PV = \frac{FV}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}, \tag{18}$$

где $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}$ – дисконтный множитель сложных процентов.

1.4.2. Банковский учёт

Банковский учёт применяется при покупке (учёте) векселей.

Банк или другое финансовое учреждение до начала срока платежа по векселю приобретает (учитывает) его у владельца по цене, которая меньше цены указанной на векселе, т.е. покупает его с дисконтом. Получив при наступлении срока платежа по векселю деньги, банк реализует свой процентный доход в виде дисконта. В свою очередь владелец векселя с помощью его продажи (учёта) имеет возможность получить деньги хотя и не в полном объеме, однако ранее указанного срока.

Банковский учёт по простым процентам

В случае учета проценты учитываются с суммы, проставленной в векселе, и текущая сумма долга по векселю определяется по формуле:

$$PV = FV - FVnd = FV(1 - nd), \tag{19}$$

где d – простая годовая учетная ставка; n – срок от момента учета до даты погашения векселя (в годах); $(1 - nd)$ – дисконтный множитель.

Разность $FV - PV$, в случае, когда PV определено дисконтированием, называют *дисконтом (D)* и рассчитывается по формуле:

$$D = FV - PV \tag{20}$$

Учет по сложной учетной ставке

В этом случае для дисконтирования применяется сложная учётная ставка d. Формула учёта по сложным процентам имеет следующий вид:

$$PV = FV(1 - d)^n, \tag{21}$$

где d – сложная годовая учетная ставка.

Также как и наращение по сложным процентам, дисконтирование может производиться не один, а m раз в год по номинальной учетной ставке f.

Номинальная учётная ставка – это годовая ставка сложных процентов, по которой учёт процентов осуществляется несколько раз в год.

Формула учёта по номинальной учётной ставке имеет вид:

$$PV = FV\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}, \tag{22}$$

где f – *номинальная годовая учетная ставка*.

Существует эффективная учётная ставка эквивалентная номинальной учетной ставке. ***Эффективная учётная ставка*** (d) характеризует степень дисконтирования в целом за год.

Эти ставки (номинальная и эффективная) эквивалентны в финансовом отношении, т. е. дают одинаковый результат за один и тот же промежуток времени, и определяются на основании равенства соответствующих дисконтных множителей (формула (23)):

$$(1 - d)^n = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn}, \tag{23}$$

отсюда, эффективная учётная ставка равна:

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m}, \tag{24}$$

а номинальная учётная ставка равна:

$$f = m\left(1 - \sqrt[m]{1 - d}\right). \tag{25}$$

Наращение по учётной ставке

Бывают ситуации когда, необходимо определить сумму, которую надо проставить в векселе, если известна текущая сумма долга. В этом случае применяется наращение по учетной ставке.

Наращенная сумма по простой учетной ставке определяется на основании формулы учета (19), в соответствии с выражением (26):

$$FV = PV\frac{1}{1-nd}, \tag{26}$$

где $\frac{1}{1-nd}$ – множитель наращения по простой учетной ставке.

Сложная учётная ставка также применяется для наращения. Формулы наращения по сложным учётным ставкам выглядят следующим образом:

$$FV = \frac{PV}{(1-d)^n} = PV\frac{1}{(1-d)^n}, \tag{27}$$

где $\frac{1}{(1-d)^n}$ – множитель наращения по сложной учетной ставке.

$$FV = \frac{PV}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mn}}, \tag{28}$$

где $\frac{1}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{nm}}$ – множитель наращения по номинальной учетной ставке.

Контрольные вопросы

1. Что такое дисконтирование?
2. Математическое дисконтирование;
3. Банковский учет;
4. Что показывает дисконтный множитель?
5. Номинальная учетная ставка;
6. Понятие эффективной учетной ставки;
7. Соотношение эквивалентности эффективной и номинальной учетных ставок;
8. Наращение по простой и сложной учетным ставкам?

1.5. Тема 5 «Изменение условий коммерческих сделок»

Конверсия платежей – это изменение условий платежей.

На практике часто возникают случаи, когда необходимо заменить одно денежное обязательство другим, или объединить несколько платежей в один – консолидация и т.п. Изменение любого параметра в рамках одной операции обязательно повлечёт за собой изменение остальных параметров.

Общепринятым принципом в этих случаях является *принцип финансовой эквивалентности обязательств*, который позволяет изменять условия коммерческих сделок без нарушения прав и обязанностей каждой из участвующих сторон. На принципе эквивалентности основывается сравнение разновременных платежей.

Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи приведенными, к одному моменту времени (базовой дате), оказываются равными.

Приведение осуществляется путем дисконтирования – приведение к более ранней дате, или наращения суммы платежа, если эта дата относится к будущему.

Для краткосрочных обязательств приведение осуществляется на основе простых процентов, для средне- и долгосрочных – с помощью сложных процентов.

При изменении условий платежей общий метод решения заключается в разработке так называемого ***уравнения эквивалентности***, в котором сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-либо моменту времени, приравнивается к сумме платежей по новому обязательству, приведенных к этой же дате.

Консолидация задолженности

Частным случаем конверсии платежей является ***консолидация задолженности*** – объединение нескольких платежей в один.

В случае консолидации платежей решение также заключается в составлении уравнения эквивалентности, при этом возможны две постановки задачи:

1) определение ***размера*** консолидированного платежа (FV_o), если известен срок этого платежа. В этом случае, при составлении уравнения эквивалентности, приведение удобнее осуществлять на дату неизвестного платежа.
2) определение ***срока*** консолидированного платежа (n_o), если известна сумма платежа. В этом случае уравнение эквивалентности удобно представить в виде равенства современных стоимостей соответствующих платежей, т.е. базовой датой будет являться нулевой момент времени.

Контрольные вопросы

1. Что такое конверсия платежей?
2. Что такое консолидация задолженности?
3. В чем заключается общий метод решения задач на конверсию платежей;
4. Сущность уравнения эквивалентности.

1.6. Тема 6 «Потоки платежей»

1.6.1. Виды потоков платежей и их параметры

Поток платежей – ряд доходов или выплат, происходящих в разные моменты времени.

Из определения следует, что платежи могут быть:

– *положительные* – входящие по отношению к инвестору, например, периодическое получение доходов от инвестиций;
– *отрицательные* – исходящие, например, погашение задолженности в рассрочку, выплаты пенсии и т.д.

Потоки платежей бывают:

– *нерегулярные* – выплаты могут быть как положительные, так и отрицательные, и происходят через разные промежутки времени;
– *регулярные* – размеры платежей постоянные происходящие через равные промежутки времени (***финансовая рента*** или ***аннуитет***).

Финансовые ренты описываются следующими <u>*основными параметрами*</u>:

1. *член ренты* – размер отдельного платежа;
2. *период ренты* – временной интервал между двумя последовательными платежами;
3. *срок ренты* – это время от начала реализации ренты до момента выплаты последнего платежа;
4. *процентная ставка* – это процентная ставка, которая используется для расчета текущей и будущей стоимости платежей, составляющих ренту (как правило, это сложная ставка).

<u>*Дополнительные параметры потоков платежей*</u>:

1. *количество платежей:*
   – конечное число выплат (*ограниченные ренты*);
   – бесконечное (*бесконечные* или *вечные ренты* – срок операции весьма продолжителен и не оговаривается конкретными датами).
2. *момент реализации ренты:*
   – немедленный (*немедленные ренты* – выплаты начинаются сразу после заключения контракта);
   – отложенный *(отсроченные* или *отложенные ренты).*
3. *число платежей в течение года:*
   – один раз в году (*годовые ренты*);
   – p-раз в году (p*-срочные ренты*).
4. *начисление процентов:*
   – один раз в году;
   – m-раз в году;
   – непрерывно (за бесконечно малые промежутки времени).
5. *момент платежа:*
   – в начале периода (*рента пренумерандо*);
   – в середине периода;
   – в конце периода (*обыкновенные ренты или постнумерандо*).
6. *величина выплат (членов ренты):*
   – одинаковая (*постоянные ренты*);
   – переменная (*переменные ренты*).

7. *вероятность выплаты ренты:*

– безусловная выплата, например, погашение кредита (*верная рента*);

– в зависимости от наступления некоторого случайного события, например, страховые аннуитеты (*условная рента*).

Существуют также две обобщающие характеристики потоков платежей:

1. *Текущая (современная) стоимость* *потока платежей* (PVA) – это сумма всех выплат, дисконтированных на нулевой момент времени (рис. 3).

Для потоков платежей при начислении процентов, в большинстве случаев, используется схема сложного процента.

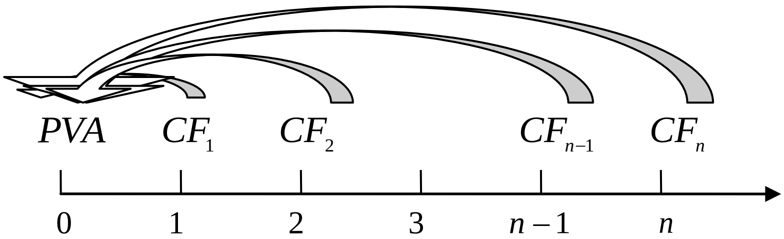


Рис. 3. Текущая стоимость потока платежей

Для расчета текущей стоимости потока платежей необходимо дисконтировать все платежи на нулевой момент времени, т. е. умножить на соответствующие дисконтные множители.

$\dfrac{1}{(1+r)^n}$ – множитель дисконтирования по сложным процентам.

Следовательно, текущую стоимость годовой ренты с неравными платежами можно рассчитать по формуле:

$$PVA = \frac{CF_1}{(1+r)^1} + \frac{CF_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{CF_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} + \frac{CF_n}{(1+r)^n}, \tag{29}$$

где, PVA – современная стоимость потока платежей; CF_n – член ренты; n – общий срок выплат; r – сложная годовая процентная ставка.

2. *Наращенная (будущая) стоимость* *потока платежей* (FVA) – это сумма всех платежей с начисленными на них к концу срока процентами, т. е. приведенных к моменту последнего платежа (рис. 4).

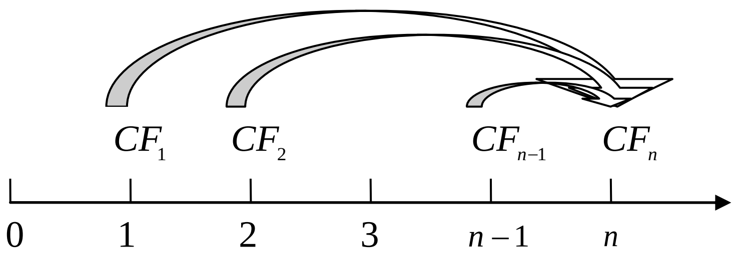


Рис. 4. Будущая стоимость потока платежей

Для расчета будущей стоимости потока платежей, все платежи необходимо привести к дате, относящейся к будущему (наращением), т. е. умножить на соответствующие множители наращения.

Тогда будущая стоимость годовой ренты с неравными платежами может быть определена в соответствии с выражением (30):

$$FVA = CF_1 (1+r)^{n-1} + CF_2 (1+r)^{n-2} + ... + CF_{n-1} (1+r) + CF_n , \tag{30}$$

где FVA – будущая стоимость потока платежей.

1.6.2. Обыкновенный аннуитет (постоянная рента постнумерандо)

Обыкновенный аннуитет – это ряд однонаправленных платежей одинаковой величины, происходящих через равные промежутки времени в конце периода.

Из определения следует, что для обыкновенного аннуитета все платежи равны между собой, т.е. $CF_1 = CF_2 = CF_3 = ...CF_{n-1} = CF_n$. С учетом этого, выражения (29) и (30) представляют собой геометрическую прогрессию. Очевидно, текущая и будущая стоимость обыкновенного аннуитета равна сумме членов соответствующей прогрессии, откуда:

– *современная (текущая) стоимость обыкновенного аннуитета* равна*:*

$$PVA = CF \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \tag{31}$$

– *наращенная (будущая) стоимость обыкновенного аннуитета* равна*:*

$$FVA = CF \frac{(1+r)^{n} - 1}{r} \tag{32}$$

Обыкновенный аннуитет с начислением процентов m раз в год и выплатами p раз в год равными суммами

При расчёте текущей и будущей стоимости потока платежей возможно начисление процентов несколько (m) раз в год по ставке (j/m). Платежи также могут осуществляться не один, а несколько (p) раз в год равными частями. Такой поток платежей называется p- срочная рента с начислением процентов m раз в год по номинальной ставке j.

В этом случае формулы (31) и (32) преобразуются следующим образом:

1) годовой платеж разбивается на p равных частей, следовательно, величина отдельного члена ренты равна CF/p;

2) в числителе начисление процентов вместо эффективной ставки r осуществляется уже по номинальной ставке j/m, соответственно в степени подставляем общее количество периодов наращения равное $m \cdot n$;

3) в знаменатель подставляем эффективную ставку эквивалентную начислению процентов m раз в год по номинальной ставке j/m, которую можно получить из равенства соответствующих множителей наращения:

$$(1+r)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn},$$

но, поскольку платежи осуществляются с периодичностью p - раз в год, следовательно, вместо числа лет необходимо взять общее число периодов выплат ренты – $n \cdot p$, тогда соотношение эквивалентности будет следующим:

$$(1+r)^{np} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn},$$

извлекая из левой и правой части этого выражения корень степени np:

$$(1+r) = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}},$$

отсюда эффективная ставка равна:

$$r = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1.$$

Если $p \neq m$, то имеют место следующие формулы:

– *текущая стоимость* p *- срочной ренты:*

$$PVA = \frac{CF}{p} \cdot \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^{m/p}-1}. \quad (33)$$

– *будущая стоимость* p *- срочной ренты:*

$$FVA = \frac{CF}{p} \cdot \frac{(1+j/m)^{mn}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}; \quad (34)$$

Периодический взнос на погашение кредита

Задача заключается в следующем: необходимо определить величину самого аннуитета (платежа или поступления), если известна его текущая стоимость, число взносов и ставка дохода. Величина годового взноса определяется на основании выражения (31) по формуле:

$$CF = \frac{PVA}{1-(1+r)^{-n}} \cdot r, \quad (35)$$

где PVA – текущая стоимость потока платежей (сумма, выданная в кредит – тело кредита); CF – периодический годовой взнос на погашение кредита; n – общий срок выплат (количество платежей).

Если платежи осуществляются несколько раз в год, то периодический взнос на погашение кредита рассчитывается на основании формулы (33) в соответствии с выражением:

$$\frac{CF}{p} = \frac{PVA}{1-(1+j/m)^{-mn}} \cdot \left[(1+j/m)^{m/p} - 1\right], \tag{36}$$

где p – количество взносов в год.

Периодический взнос в фонд накопления

Требуется рассчитать величину периодически вносимой суммы, необходимой для накопления нужной стоимости при заданной ставке процентов. Величина годового взноса определяется на основе выражения (32) по формуле:

$$CF = \frac{FVA}{(1+r)^n - 1} \cdot r, \tag{37}$$

где FVA – будущая стоимость потока платежей (накопленная сумма – величина фонда в конце срока); CF – годовой взнос в фонд накопления; n – общий срок выплат (количество взносов).

Если взнос в фонд накопления осуществляется несколько раз в год, то величина периодического взноса рассчитывается по формуле:

$$\frac{CF}{p} = \frac{FVA}{(1+j/m)^{mn} - 1} \cdot \left[(1+j/m)^{m/p} - 1\right]. \tag{38}$$

1.6.3. Другие виды аннуитета

На практике также применяются и другие виды потоков платежей.

Рента пренумерандо

Рента пренумерандо – это рента с платежами в начале периодов.

Следовательно, каждый член такой ренты работает на один период больше, чем в ренте постнумерандо.

Для расчёта основных характеристик ренты пренумерандо используются следующие формулы:

– *текущая стоимость ренты пренумерандо:*

$$PVA' = PVA \cdot (1+r), \tag{39}$$

$$PVA' = PVA \cdot (1+j/m)^{m/p}, \tag{40}$$

где PVA' – текущая стоимость ренты с выплатами в начале периода; PVA – текущая стоимость обыкновенного аннуитета.

– *будущая стоимость ренты пренумерандо:*

$$FVA' = FVA \cdot (1+r), \tag{41}$$

$$FVA' = FVA \cdot (1+j/m)^{m/p}, \tag{42}$$

где FVA' – будущая стоимость ренты с выплатами в начале периода; FVA – будущая стоимость обыкновенного аннуитета.

Отложенная рента

Начало выплат отложенной ренты сдвинуто вперед относительно некоторого момента времени.

Для отложенной на t лет ренты:

– *современная стоимость* равна дисконтированной на этот срок величине современной стоимости немедленной ренты (рис. 5).

0 – момент заключения контракта;

t – момент реализации ренты;

$t+1$ – первый платеж;

$t+2$ – второй;

$t+n$ - последний платеж.

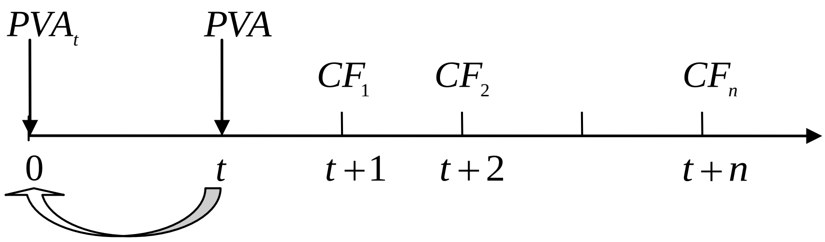


Рис. 5. Текущая стоимость отложенной ренты

$$PVA_t = PVA\frac{1}{(1+r)^t}, \tag{43}$$

где PVA_t – текущая стоимость отложенной ренты; PVA – текущая стоимость обыкновенного аннуитета.

– на величине *будущей стоимости,* сдвиг во времени не отражается, следовательно, для расчета могут быть использованы формулы обыкновенного аннуитета:

$$FVA_t = CF\frac{(1+r)^n - 1}{r}, \tag{44}$$

$$FVA_t = \frac{CF}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^{m/p} - 1}, \tag{45}$$

где FVA_t – будущая стоимость отложенной ренты.

Бесконечный аннуитет (вечная рента)

Вечная рента **–** ряд платежей, количество которых неограниченно.

Например, это облигации без срока погашения, по такой облигации доходы выплачиваются через равные промежутки времени, а возврата основной суммы долга нет.

Для бесконечного аннуитета имеют место следующие формулы:

– *современная стоимость* вечной ренты определяется, как:

$$PVA_\infty = \frac{CF}{r}, \tag{46}$$

для p - срочной вечной ренты с начислением процентов m раз в году по номинальной ставке j, текущая стоимость определяется по формуле:

$$PVA_{\infty} = \frac{CF}{p\left[(1+j/m)^{m/p}-1\right]}; \tag{47}$$

– *будущая стоимость* бесконечной ренты равна бесконечности:

$$FVA_{\infty} = \infty. \tag{48}$$

Контрольные вопросы

1. Что такое поток платежей;
2. Основные параметры потоков платежей;
3. Виды потоков платежей;
4. Что такое текущая стоимость потока платежей, как её рассчитать?
5. Понятие будущей стоимости потока платежей и как её рассчитать?
6. Понятие «обыкновенный аннуитет» и его основные характеристики;
7. Периодический взнос на погашение кредита. Исходя из какой функции он может быть рассчитан?
8. Периодический взнос в фонд накопления. Какая функция используется для его определения?
9. Что такое бесконечный аннуитет, его основные параметры?
10. Отложенная рента и её основные параметры.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Тема 1: Наращение по простым процентам

Пр.1. Ссуда в размере 100 тыс. руб. выдана 20.01 по 05.10 включительно (год не високосный) под 15 % годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при условии начисления простых процентов? Рассчитайте наращенную сумму с использованием трех методик начисления простых процентов.

Решение:

$PV = 100.000$ руб.
$r = 0{,}15$
$FV = ?$

Срок операции выражен в днях, следовательно, для определения размера долга в конце срока используем формулу (3):

$$FV = PV(1 + \frac{t}{K} r).$$

Для использования всех трех методик, необходимо рассчитать число дней ссуды точное и приближенное:

– *точное* определяется строго по календарю и равно

$$t_{точное} = 11 + 28 + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 30 + 5 = 258 \text{ дней;}$$

– *приближенное* рассчитывается исходя из предположения, что в каждом месяце ровно по 30 дней

$$t_{приближ} = 10 + 30 \cdot 8 + 5 = 255 \text{ дней.}$$

Рассчитаем наращенную сумму тремя способами.

1. *Точные проценты с точным числом дней ссуды* (365/365)
Временная база $K = 365$ дней, $t_{точное} = 258$ дней, тогда:

$$FV = 100.000(1 + \frac{258}{365} 0{,}15) = 110.603 \text{ руб.}$$

2. *Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды* (360/365)
$K = 360$ дней, $t_{точное} = 258$ дней:

$$FV = 100.000(1 + \frac{258}{360} 0{,}15) = 110.750 \text{ руб.}$$

3. *Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды* (360/360)
$K = 360$ дней, $t_{прибл} = 255$ дней:

$$FV = 100.000(1 + \frac{255}{360} 0{,}15) = 110.625 \text{ руб.}$$

Наиболее точные результаты даёт первый способ начисления процентов.

Пр.2. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год – 10 % годовых, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 0,5 п.п. (процентных пункта). Определите множитель наращения за 2,5 года.

Решение:

В этом случае применяются изменяющиеся во времени (плавающие) ставки.

$r_1 = 0{,}10 \quad n_1 = 1$

$r_2 = 0{,}105 \quad n_2 = 0{,}5$

$r_3 = 0{,}11 \quad n_3 0{,}5 \qquad \sum_t n_t = 2{,}5$

$r_4 = 0{,}115 \quad n_4 = 0{,}5$

$r_5 0{,}115 \quad n_5 = 0{,}5$

Множитель наращения за 2,5 года равен:

$$(1+\sum_t n_t r_t) = 1 + 1\cdot 0{,}10 + 0{,}5\cdot 0{,}105 + 0{,}5\cdot 0{,}11 + 0{,}5\cdot 0{,}115 = 1{,}265.$$

Т.е. при таком порядке начисления процентов, за 2,5 года первоначальная сумма увеличится в 1,265 раза.

Тема 2: Наращение по сложным процентам

Пр.3. Какой величины достигнет долг равный 100 тыс. руб., через пять лет при росте по сложной ставке 12 % годовых? Проценты начисляются: один раз в год, раз в полгода, ежеквартально и ежемесячно.

Решение:

$PV = 100.000$ руб.

$r = 0{,}12$

$n = 5$ лет

Рассчитаем накопленную сумму долга при начислении процентов:

1) *один раз в год*, в этом случае можно воспользоваться формулой (5):

$$FV = PV(1+r)^n$$

$$FV = PV(1+r)^n = 100.000(1+0{,}12)^5 = 176.234{,}16 \text{ руб.}$$

2) *по полугодиям*, т.е. два раза в год $m = 2$, следовательно, применяется номинальная ставка, и следует воспользоваться формулой (7):

$$FV = PV\left(1+\frac{j}{m}\right)^N$$

$$FV = 100.000\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^{2\cdot 5} = 179.084{,}77 \text{ руб.,}$$

3) *ежеквартально,* $m = 4$:

$$FV = 100.000\left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^{4\cdot 5} = 180.611{,}12 \text{ руб.,}$$

4) *ежемесячно,* $m = 12$:

$$FV = 100.000\left(1 + \frac{0{,}12}{12}\right)^{12 \cdot 5} = 181.669{,}67 \text{ руб.}$$

Из примера видно, ***что чем чаще начисляются проценты, тем быстрее идет процесс наращения (цепной процесс)!***

Пр.4. Определите размер эффективной ставки, обеспечивающей безубыточную замену ежемесячного начисления процентов по номинальной ставке 25 % годовых.

Решение:

Из соотношения эквивалентности эффективной и номинальной ставки по формуле (8), рассчитаем годовую ставку сложных процентов эквивалентную номинальной ставке 25 % при ежемесячном начислении:

$m = 12$

$j = 0{,}25$

$$r = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m} - 1 = \left(1 + \frac{0{,}25}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}2807 \text{ или } \approx 28 \text{ \%}.$$

Т. е. начисление процентов один раз в год по эффективной ставке 28% годовых безубыточно заменяет ежемесячное начисление процентов по номинальной ставке 25% годовых.

Тема 3: Простые и сложные проценты

Пр.5. На сумму 600 тыс.руб. ежеквартально начисляются проценты по ставке 12% годовых. Срок операции 14 месяцев. Определить накопленную сумму с использованием смешанной схемы и сложных процентов.

Решение:

$PV = 600.000$ руб.

$j = 0{,}12$

Для определения размера суммы в конце срока при начислении процентов за дробное число лет воспользуемся формулами (14) и (15).

$$FV = PV\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n_1 + n_2}$$

$$FV = PV\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n_1} \cdot \left(1 + \frac{r}{m} \cdot n_2\right)$$

Проценты начисляются ежеквартально ($m = 4$), т.е. один период наращения равен трём месяцам. Выделим количество целых кварталов и оставшуюся дробную часть одного квартала:

$$n_1 + n_2 = \frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}.$$

1. Схема сложных процентов:

$$FV = 600\left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{4+\frac{2}{3}} = 688{,}750 \text{ тыс. руб.}$$

2. Смешенная схема:

$$FV = 600\left(1 + \frac{0{,}12}{4}\right)^{4} \cdot \left(1 + \frac{0{,}12}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = 688{,}810 \text{ тыс. руб.}$$

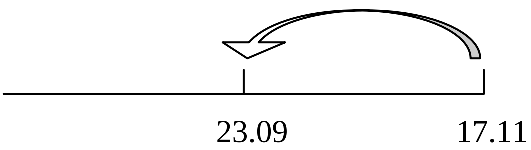
Тема 4: Учётные ставки

Пр.6. Вексель выдан на сумму 100 тыс. руб. с уплатой 17.11.2006. Владелец векселя учел его в банке 23.09.2006 по учетной ставке 20 % годовых способом (365/365). Рассчитайте, полученную векселедержателем при учете векселя сумму и величину дисконта в пользу банка.

Решение:

$FV = 100.000$ руб.
$d = 0{,}20$

Схематичное изображение условия задачи:



Движение во времени в обратном направлении предполагает операцию дисконтирования, при учёте векселей применяется один из способов дисконтирования – банковский учёт.

Определим срок от момента учёта до даты погашения. Т.к. используется способ (365/365) – это точные проценты с точным числом дней ссуды, следовательно, временная база $K = 365$ дней, а число дней ссуды определяется строго по календарю:

$n = 7 + 31 + 17 = 55$ дней.

Т.к. срок менее одного года, воспользуемся формулой учёта по простым процентам (19):

$$PV = FV(1 - nd)$$

Определим сумму, получаемую владельцем векселя при его учете:

$$PV = 100.000(1 - \frac{55}{365}0{,}2) = 96.986 \text{ руб.}$$

Дисконт в пользу банка составил:

$$D = FV - PV = 100.000 - 96.986 = 3.014 \text{ руб.}$$

__Тема 5: Изменение условий коммерческих сделок__

Пр.7. Имеется обязательство уплатить 300 тыс. руб. через шесть лет. Стороны согласились изменить условия погашения долга следующим образом: через три года выплачивается 100 тыс. руб., а оставшийся долг – спустя четыре года после первой выплаты. Необходимо определить сумму последнего платежа, при условии, что пересчёт осуществляется по ставке 10 % годовых.

Решение:

$r = 0{,}10$

$FV_1 = 300$ тыс. руб.

$n_1 = 6$ лет

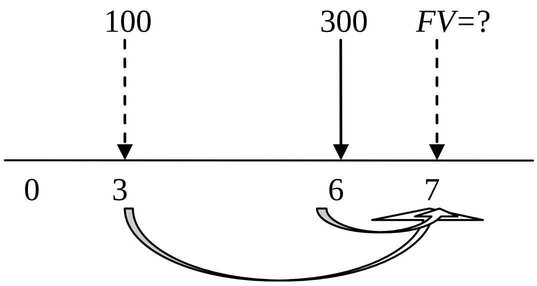
$FV_2 = 100$ тыс. руб.

$n_1 = 4$ года

Для того чтобы определить сумму остатка, необходимо составить уравнение эквивалентности, в котором сумму, по старому обязательству приведённую к какой либо дате приравнять к сумме новых платежей приведённых к этой же дате.

Если неизвестен размер платежа, уравнение эквивалентности удобнее составлять на дату неизвестного платежа. Поэтому в качестве базовой даты выберем дату выплаты остатка.

Изобразим графически условие задачи:



Движение во времени в прямом направлении предполагает операцию наращения. Поскольку сроки более одного года, то приведение осуществляем по схеме сложного процента путем умножения платежей на множитель наращения сложных процентов.

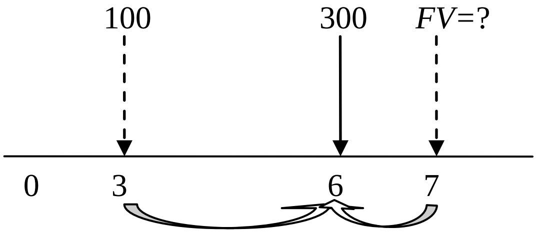
$(1+r)^n$ - множитель наращения по сложным процентам.

Уравнение эквивалентности будет иметь следующий вид:

$$300(1+0{,}1)^1 = 100(1+0{,}1)^4 + FV$$

Решив данное уравнение, получаем, что сумма остатка составляет 183,590 тыс. руб. В сумме по новому обязательству будет выплачено 100+183,590=283,590 тыс. руб., что на 16,410 тыс. руб. меньше чем по старому обязательству. Этот факт объясняется тем, что первый платёж в размере 100 тыс. руб. осуществляется три года раньше, и на эту сумму проценты уже не начисляются.

Аналогичное по смыслу равенство можно составить на любую базовую дату, например на конец шестого года:



В этом случае неизвестный платёж приводится к более ранней дате, поэтому он дисконтируется.

$\frac{1}{(1+r)^n}$ – множитель дисконтирования по сложным процентам.

И уравнение эквивалентности будет выглядеть следующим образом:

$$300 = 100(1+0,1)^3 + \frac{FV}{(1+0,1)^1}$$

Решив это уравнение, получили, что сумма остатка составляет 183,590 тыс. руб.

Изменение базовой даты, на которую составляется уравнение эквивалентности, не меняет условие задачи, а, следовательно, не должно отражаться на полученном результате. Лишь в некоторых случаях изменение базовой даты дает незначительное смещение результата.

Тема 6: Потоки платежей

Пр.8. Какую сумму необходимо положить на депозит под 10 % годовых сегодня, чтобы затем один раз в конце года в течение пяти лет снимать по 300 тыс. руб.?

Решение:

$CF = 300$ тыс. руб.
$r = 0,10$
$n = 5$ лет

В этой задаче необходимо определить современную (текущую) стоимость всех будущих изъятий по 300 тыс.руб. в течение пяти лет. Т.к. суммы изъятий и периоды времени между ними равные, следовательно, этот поток платежей является обыкновенным аннуитетом.

Для нахождения текущей стоимости обыкновенного аннуитета воспользуемся формулой (32):

$$PVA = CF\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

$PVA = 300\frac{1-(1+0,1)^{-5}}{0,1} = 1.137$ тыс. руб.

Т.о. инвестор за весь срок снимает $5 \cdot 300 = 1.500$ тыс. руб. Разница между первоначальным вкладом 1.137 тыс. руб. и накоплением 1.500 тыс. руб. обеспечивается суммой процентов, начисляемых на уменьшающийся остаток вклада по технике сложного процента. Этот процесс предполагает, в конечном счете, *нулевой остаток* на депозите. Правильность расчетов можно проверить по методу депозитной книжки (табл. 1).

Таблица 1

Метод депозитной книжки

Год	Остаток на начало года	«+»10% на остаток	«-» годовое изъятие	Остаток на конец года
1	1137	114	300	951
2	951	95	300	746
3	746	75	300	521
4	521	52	300	273
5	273	27	300	0

Пр.9. Для обеспечения некоторых будущих расходов создается фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянной ренты постнумерандо ежеквартально в течение пяти лет. Размер годового платежа 4 млн руб. На поступившие взносы ежемесячно начисляются проценты по ставке 18,5 % годовых. Определите величину фонда на конец срока?

Решение:

$CF = 4$ млн. руб.
$n = 5$ лет
$r = 0{,}185$

Капитализация процентов производится ежемесячно, т. е. $m = 12$**,** платежи осуществляются ежеквартально (четыре раза в год) $p = 4$.

Величина фонда в конце срока это есть сумма всех вносимых платежей с начисленными на них к концу срока процентами, т.е. будущая величина потока платежей. Для нахождения этой величины воспользуемся формулой (34):

$$FVA = \frac{CF}{p} \cdot \frac{(1 + j/m)^{mn} - 1}{(1 + j/m)^{m/p} - 1},$$

тогда величина фонда в конце срока

$$FVA = \frac{4}{4} \cdot \frac{\left(1 + \frac{0{,}185}{12}\right)^{12 \cdot 5} - 1}{\left(1 + \frac{0{,}185}{12}\right)^{12/4} - 1} = 32{,}025 \text{ млн.руб.}$$

Т.о. внесение $4 \cdot 5 = 20$ млн руб. позволит за пять лет накопить 32,025 млн руб. Разница 12,025 млн руб. обеспечена начисленными процентами на возрастающую сумму на счёте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель курса «Финансовая математика» состоит в изучении методов количественного анализа, необходимых для принятия финансовых решений в условиях современного рынка.

В учебном пособии рассмотрены общетеоретические аспекты дисциплины «Финансовая математика», а также методы математических расчётов, применяемых в финансовых операциях. Значительное внимание уделено процессам наращения по простым и сложным процентам по фиксированным и переменным ставкам, дисконтированию по простой и сложной учетным ставкам, конверсии платежей, а также изучению различных видов потоков платежей.

Закреплению основных понятий и базовых формул будет способствовать самостоятельная проверка знаний с помощь ответов на вопросы, представленные после каждого раздела дисциплины.

Отдельным разделом учебного пособия рассмотрены типовые примеры решения задач по каждой теме.

В процессе изучения курса «Финансовая математика» решаются следующие задачи:

1. Овладение основными принципами и методами анализа одиночных выплат и потоков платежей;
2. Понимание финансовой эквивалентности платежей;
3. Изучение современных моделей оценивания производных финансовых инструментов;
4. Применение изученных методов при анализе ценных бумаг, при решении кредитных и коммерческих задач.

Для проверки освоения курса и решения поставленных задач, студентами дневной и заочной формы обучения, выполняется контрольная работа по вариантам, состоящая из контрольных заданий по каждому разделу дисциплины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Четыркин, Е.М. Финансовая математика: учеб. / Е.М. Четыркин. – М.: Дело, 2006. – 396 с.
2. Ковалёв, В.В . Курс финансовых вычислений / В.В. Ковалёв, В.А. Уланов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 558 с.
3. Четыркин, Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчётов. / Е.М. Четыркин. – М.: «Дело ЛТД», 2005. – 320 с.
4. Кочович, Е. Финансовая математика с задачами и решениями: учебно-метод. пособие / Е. Кочович. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 379 с.
5. Цымбаленко, С. В. Финансовые вычисления: учеб. / С.В. Цымбаленко. – М.: Финансы и статистика, 2004. – 158 с.
6. Уланов, В.А. Сборник задач по курсу финансовых вычислений / под ред. проф. В.В. Ковалёва. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 400 с.
7. Бочаров, В.В. Финансовый анализ / В.В. Бочаров. – СПб.: Питер, 2007. – 218 с.
8. Горбунов, А.Р. Управление финансовыми потоками / А.Р. Горбунов. – М.: Глобус, 2004. – 216 с.
9. Мельников, А.В. Математика финансовых обязательств / А.В. Мельников, С.Н. Волков, М.Л. Нечаев. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 259 с.
10. Бердникова , Т.Б. Оценка ценных бумаг / Т.Б. Бердникова. – М.: Инфра-М, 2006. – 143 с.
11. Бертонеш, М. Управление денежными потоками / М. Бертонеш. – СПб.: Питер, 2004. – 240 с.
12. Тертышный, С.А. Рынок ценных бумаг и методы его анализа / С.А. Тертышный. – СПб.: Питер, 2005. – 220 с.

Учебное издание

Егорова Ольга Вячеславовна

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Под редакцией Л.А. Баева

Техн. редактор *А.В. Миних*

Издательский центр Южно-Уральского государственного университета

Подписано в печать 05.03.2015. Формат 60×84 1/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 2,09. Тираж 50 экз. Заказ 73.

Отпечатано в типографии Издательского центра ЮУрГУ.
454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76.