Министерство образования и науки Российской Федерации
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра «Экономика и экономической безопасности»

519.2(07)
Г953

В.Г. Гурлев, Т.С. Хомякова

# ТЕОРИЯ ОШИБОК И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРЕДПРИЯТИЯ

Учебное пособие

Челябинск
Издательский центр ЮУрГУ
2016

УДК 519.87(075.8) + 519.22(075.8)
Г953

*Одобрено*
*учебно-методической комиссией*
*факультета экономики и предпринимательства*

*Рецензенты:*
*В.В. Пудовкин, О.С. Буслаева*

**Гурлев В. Г.**
Г953 Теория ошибок и математическая обработка результатов экспертных исследований предприятия: учебное пособие / В. Г. Гурлев, Т. С. Хомякова – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. –78с.

В пособии рассматриваются основы теории «ошибок» и особенности математической обработки результатов экспертных исследований. Представление информации как первичного материала вероятностных моделей и проверки гипотез. Производится описание параметрических критериев проверки основных статистических гипотез. Приводятся примеры, иллюстрирующие применение статистических критериев.

Пособие составлено в соответствии с требованиями Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальностям: 38.05.01 «Экономическая безопасность». Пособие поможет студенту в формировании знаний в области статистической методологии национального счетоводства и макроэкономических расчётов. Поможет овладеть основами общенаучных и специальных знаний в области математической обработки результатов деятельности экспертных оценок, а также способствует формированию эрудиции и мировоззрения будущего специалиста.

УДК 519.87(075.8) + 519.22(075.8)

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

*Цель дисциплины* «Теория ошибок и математическая обработка результатов экспертных исследований предприятия» научить студентов основам теории «ошибок» и особенностям математической обработки результатов экспертных исследований и представления информации как базы для принятия решений в профессиональной деятельности.

*Задача дисциплины* состоит в овладении будущих специалистов статистических методов учёта и управления, составление математических моделей и оценку поведения объектов в будущем для оперативно-технического и стратегического управления предприятиями.

*В результате изучения и освоения настоящей дисциплины* будущий специалист должен получить знания, имеющие не только самостоятельное значение, но и обеспечивающие базовую подготовку для успешного усвоения последующих специальных дисциплин.

*Требования к уровню освоения содержания дисциплины*. В соответствии с требованиями к обязательному минимуму содержания и уровню подготовки специалиста по специальностям: 38.05.01 – «Экономическая безопасность» стандарту высшего профессионального образования», слушатели высшей школы, изучившие дисциплину и выполнившие необходимый объём учебно-методической *работы должен знать:*

– методы и способы количественного измерения и учёта социально-экономических категорий, присущих соответствующей отрасли;

– методы анализа динамики и факторов изменения показателей деятельности организаций соответствующей отрасли и рынка, позволяющих не только объяснять существующие закономерности, но и прогнозировать их для будущего периода;

– особенности применения в отрасли методов статистического анализа; особенности методов учёта экспорта, импорта и объёма внешней торговли в соответствующей области, методологию анализа динамики и структурных сдвигов результатов деятельности организаций.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## 1.1. Теория ошибок как раздел математической статистики

**Теория ошибок –** изучение грубых и случайных ошибок. *Основные задачи теории ошибок:* определение закономерностей распределения случайных величин и сведений, как качественных, так и количественных; установление оценок (статистики) неизвестных измеряемых величин по результатам измерений, установление погрешностей таких оценок и устранение грубых ошибок.

**Методы теории ошибок** посвящены формулировке уточнённых выводов о численных значениях приближённо измеренных величин, а также об «ошибках» (погрешностях) измерений. Повторные измерения одной и той же казалось бы постоянной величины дают, как правило, различные результаты, так как каждое последующее измерение содержит некоторую погрешность. Различают три основных вида погрешностей (ошибок): систематические, грубые и случайные.

**Систематические погрешности** постоянно либо преувеличивают, либо преуменьшают результаты измерений и происходят от определённых причин (выбор и установка измерительных приборов, влияния окружающей среды и тех факторов, которые трудно определяемые и т. д.). Такие факторы влияют на определение данных наблюдений систематически в одном направлении.

**Грубые погрешности** (ошибки) возникают в результате просчёта, неправильного чтения показаний измерительных приборов, изучаемых документов и и т. п. Результаты наблюдений, содержащие грубые «ошибки», сильно отличаются от других результатов и поэтому «хорошо» заметны.

**Случайные погрешности** происходят от различных случайных причин, действующих при каждом отдельном наблюдении непредвиденным образом то в сторону уменьшения, то в сторону увеличения результатов.

*Например,* в результате $n$ независимых равноточных наблюдений некоторой неизвестной $a$, получены значения $y_1, y_2, ..., y_n$. Разности $d_1 = y_1 - a, d_2 = y_2 - a, \ldots, d_n = y_n - a$, будут называться истинными погрешностями. В терминах вероятностной «теории ошибок» все $d_i$ трактуются как случайные величины, а независимость наблюдений понимается как взаимная независимость случайных величин $d_1, ..., d_n$. Равноточность наблюдений истолковывается как одинаковая распределённость: истинные погрешности равноточных наблюдений есть суть одинаково распределённых случайных величин. При этом математическое ожидание случайных погрешностей $b = Ed_1 = ... = Ed_n$ называется систематической погрешностью, а разности $d_1 - b, d_2 - b, \ldots d_n - b$ – *случайными погрешностями («ошибками»).*

**Сущность, понятие и особенности экономической экспертизы.** *К экономической экспертизе относятся* все виды анализа, связанного со стоимостной (денежной) оценкой факторов влияния. Экономическая экспертиза включает в себя анализ и определение характеристик совокупности рынков, связанных с рассматриваемым объектом, анализ рынка объектов-аналогов, параметры которого используются при сравнительном подходе к оценке стоимости, определение величины затрат по видам производственных мероприятий, параметры финансовой системы, уровень налогообложения, типы рисков.

**Понятие и классификация методик экспертного исследования.** Методики производства отдельных видов экспертных исследований, характеризуются сочетанием необходимых требований, что является основой качества и скорости решения задач экспертизы. Методика, в общем понимании, представляет собой «совокупность методов, методических приёмов и подходов обучения или практического выполнения чего-либо». Конкретизация данного понятия, применительно к экспертной деятельности, вносит в него определенную специфику и уже в этом ракурсе под методикой экспертизы понимается «система предписаний по выбору и применению в определенной последовательности и в определенных существующих или создаваемых условиях методов и средств решения экспертной задачи». Упомянутые в определении предписания могут носить как категорический, т.е. образующий жесткую регламентацию, так и альтернативный характер, позволяющий эксперту в зависимости от сложившихся условий выбирать последовательность или определять состав применяемых приемов, методов и технических средств.

***Любая экспертная методика*** вне зависимости от ее вида включает в себя ряд обязательных элементов, образующих ее структуру:

– указание на состав специфических объектов;

– указание на возможности данной методики и ее надежность;

– указания на приемы, методы и средства исследования;

– указание на порядок и последовательность применения приемов, методов и средств;

– предписания, касающиеся условий и процедур применения приемов, методов и средств;

– описание возможных результатов применения приемов, методов и средств и их характеристика.

Методика отражает алгоритм проведения рода или вида экспертизы и специфику стадий данного алгоритма, проявляющуюся в связи с ее предметом и объектами. *«Родовая» (видовая) экспертная методика* отражает перечисленные выше элементы структуры, конкретизированные на уровне рода или вида экспертизы. Этот вид методик отражает в себе алгоритм проведения рода или вида экспертизы и специфику стадий данного алгоритма, проявляющуюся в связи с ее предметом и объектами. «*Типовая» экспертная методика* – более конкретизированный вид методики, представляющий собой результат обобщения практического опыта разрешения типовых экспертных задач в рамках определенных родов и видов экспертиз. Эти два вида методик, отражаются в методических руководствах, пособиях и рекомендациях и несут в себе рекомендательный характер. В случаях, если перед экспертом поставлена типичная, наиболее часто встречающаяся задача, то применяются типовые методики, использование которых в полной мере позволяет эксперту провести квалифицированное, проверенное практикой исследование.

**Индивидуальные и коллективные экспертные оценки.** Согласно англо-русскому словарю «expert» – это специалист. Под экспертом понимают не просто специалиста (например, выпускника вуза), а только такого, кто обладает высокой квалификацией и умеет использовать свою интуицию для решения поставленных перед ним задач, например, для диагностики, прогнозирования, выбора варианта технического или управленческого решения. Ударение в термине «эксперт», как и в словах «маркетинг» и «творог», можно ставить как на первый слог, так и на второй. Оба варианта есть нормой. Ударение на первый слог соответствует английскому языку, ударение на второй слог больше подходит для русского языка.

*Экспертные оценки* бывают индивидуальные и коллективные. Индивидуальные оценки – это оценки одного специалиста. Например, преподаватель единолично ставит на экзамене оценку студенту. Врач ставит диагноз больному и назначает лечение. Инспектор ГИБДД экспертно оценивает соблюдение правил дорожного движения водителем и прописывает лечение – штраф за нарушение правил. Но в сложных случаях, таких как оценка перспектив развития предприятия; представление материалов в судебные организации; сложные заболевания и т. п. возможно обращение к коллективному мнению экспертной комиссии – симпозиуму врачей или комиссии из 16 специалистов. Классический пример коллективной экспертной оценки – решение суда присяжных. По простым делам судья принимает решение единолично; при рассмотрении тяжких преступлений законодательством предусмотрена возможность участия в принятии решений комиссии экспертов – присяжных заседателей. Аналогичная ситуация коллективной экспертизы – в армии. Обычно командующий принимает решение единолично. Но в сложных и ответственных ситуациях проводят военный совет. Один из наиболее известных примеров такого рода – военный совет 1812 г. в Филях, на котором под председательством М.И. Кутузова решался вопрос: «Давать или не давать французам сражение под Москвой?»

Эксперт должен следовать тем или иным правилам, приведенным в нормативной и методической документации по определенному виду экспертной деятельности. Например, при оценке диссертации эксперт должен исходить из нормативных документов Высшей аттестационной комиссии РФ. Мнение эксперта (экспертов) выражено в специальном пакете документов – заключения, где представлены ответы на поставленные перед ним (ними) вопросы.

**Количественные и качественные данные.** Данные понятия можно представить как оценку данных. Например, заключения экспертов по оценке экономических показателей, или данные экспертизы криминалистических исследований и т. п.

*Вот несколько ситуаций.*

Вопрос.1. Ваше мнение о качестве выпускаемой продукции предприятием.

Ответы.

1. Отличная (очень хорошая);
2. Хорошая (в основном реализуется);
3. Удовлетворительная (реализации продукции неполная);
4. Плохая (в основном скапливается на складе предприятия);
5. Совершенно плохая (продукцию никто не покупает – всё на склад).

Вопрос.2. Оценка поручена.

Ответы.

1. Индивидуальному эксперту (ИЭ);
2. Комиссии (КМ).

Вопрос 3. Возраст экспертов.

Ответы.

1. От 25 до 35 лет – молодые специалисты (МС);
2. От 36 до 43 лет – опытные;
3. Смешанный: от 25 до «45 – опыт в сочетании с молодостью» (ОиМ);
4. Только зрелые опытные специалисты (ОС) – более 45 лет.

Вопрос 4. Сколько образцов продукции необходимо для соответствующей экспертизы?

Ответы.

1. Достаточно 2-х экземпляров;
2. Необходимо от 3-х до 6-ти экземпляров;
3. Необходимо от 3-х до 10 экземпляров;
4. Достаточно 1-го экземпляра.

Результаты оценки приведены в табл.1. Совершенно очевидно, что результаты можно подразделить на две группы: «качественные» и «количественные». К качественным данным отнесены ответы на вопросы 1 и 2. К количественным – ответы на 3 и 4 вопросы.

Понятно, что вопрос 1, задаваемым экспертам относится к качественным данным. Однако на практике, например при оценке по бальной системе, такие данные часто рассматриваются как количественные.

Таблица 1

Так выглядят результаты оценки

| Эксперты или члены комиссии | Ответы на вопрос 1 | Ответы на вопрос 2 | Ответы на вопрос 3 | Ответы на вопрос 4 |
|---|---|---|---|---|
| «А» | Хорошая | (ИЭ) | 25 до 35 – (МС) | 1 |
| «Б» | Удовлетвори-тельная | (ИЭ) | 36…43 – опытные | 5 |
| «В» | Плохая | (КМ) | 36…43 – опытные | 7 |
| «Г» | Хорошая | (ИЭ) | (ОС) – более 45 лет | 4 |
| «Д» | Совершенно плохая | (КМ) | 25…45 – (ОиМ) | 3 |
| «Е» | Хорошая | (КМ) | 25 до 35 – (МС) | 1 |
| «Ж» | Отличная | (КМ) | 25 до 35 – (МС) | 2 |
| «З» | Удовлетвори-тельная | (ИЭ) | 36…43 – опытные | 1 |
| «И» | Удовлетвори-тельная | (КМ) | 36…43 – опытные | 3 |

То есть, могут возникнуть случаи, когда это может выглядеть так.

Ответы.

Отличная («очень хорошая») – соответствует баллу «5»;

Хорошая («в основном реализуется») – «4»;

Удовлетворительная («реализации продукции неполная») – «3»;

Плохая («в основном скапливается на складе предприятия») – «2»;

Совершенно плохая («продукцию никто не покапает – всё на склад») – «1».

Или так.

Ответы.

Отличная («очень хорошая») – соответствует баллу «2»;

Хорошая («в основном реализуется») – 1»;

Удовлетворительная («реализации продукции неполная») – «0»;

Плохая («в основном скапливается на складе предприятия») – «-1»;

Совершенно плохая («никто не покапает – всё на склад») – «-2».

Ясно, что существует теоретические и практические (реальные) представления о действительности. Поэтому, одни и те же данные можно рассматривать как количественные, так и качественные, всё зависит от ситуации, то есть где они используются. Вот пример, данные табл.2. Посмотрите на таблицу 2 и попытайтесь определить, к каким категориям данных относятся «графы»:

1. Характеристика денежной массы;
2. Денежная масса это;
3. Комфортная температура хранения денег (бумажных купюр), $^{o}$C;
4. Оптимальная величина денег в «наминале», % от общего капитала.

Ответы. «Характеристика денежной массы» и «денежная масса» – относятся к качественным данным.

«Комфортная температура хранения денег, $^{o}C$»; «Оптимальная величина денег в «наминале», % от общего капитала» – относятся к количественным данным.

Таблица 2

Вопросы экспертам

| Мнение специалистов | Характеристика денежной массы | Денежная масса это | Комфортная температура хранения бумажных купюр, $^{o}C$ | Оптимальная величина денег в «наминале», % от общего капитала |
|---|---|---|---|---|
| «А» | Показатель массы денег | Количественный показатель | 15 | 14,5 |
| «Б» | Скорость оборота денег | Качественный показатель | 25 | 12,5 |
| «В» | Запас денежной массы на 1 руб. ВВП | И качественный и количественный показатель | 35 | 16,9 |
| «Г» | Купюрное строение денег | Нет определения | 20 | 18,8 |

## 1.2. Количественные данные. Ряды распределения и гистограммы

Выбор варианта «Результатов экспертной оценки», табл.3. «Отклонение результата от его средней величины – $\mu$».

Первое, что необходимо предпринять, это разбить все «отклонения» на группы по «интервалам отклонений» и принадлежность оценочных данных по «экспертам». У каждого эксперта свой интервал «отклонений» и в каждом» результате» только одно «отклонение». А именно, в каждом «результате» свой интервал отклонений. Каждый результат, у соответствующего «эксперта» только один результат с конкретной величиной «отклонений» – это и есть распределение по группам (табл.4).

Результаты принадлежат «экспертам» в соответствии с «отклонениями» результатов оценки. И каждому «эксперту» принадлежит разное количество «отклонений». Число «результатов» каждого «эксперта» называется «частотой». Теперь можно определить, кому больше всего принадлежат «результаты». У эксперта под номером 3 (табл.4) больше всего «результатов» – «4». А относительная частота (ОЧ) принадлежность количества результатов у 3-го эксперта в относительных единицах (или в %) составит 0,33 (или 33,3%).

Таблица 3

Отклонение результатов оценки от средней величины

| Результат № | Отклонение от средней величины, % | Результат № | Отклонение от средней величины, % | Результат № | Отклонение от средней величины, % |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7,9 | 5 | 6,9 | 9 | 5,7 |
| 2 | 7,4 | 6 | 7,2 | 10 | 8,9 |
| 3 | 6,9 | 7 | 7,6 | 11 | 6,7 |
| 4 | 7,3 | 8 | 8,0 | 12 | 11,5 |

Таблица 4

Распределение «интервалов отклонения» по группам

| Эксперт | Интервал отклонение от средней величины, % | Распределение результатов по экспертам | Среднее значение интервала | Количество результатов (относительная частота) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5,7…6,9 | 1 | 6,3 | 0,083 |
| 2 | 7,0…7,5 | 3 | 7,25 | 0,25 |
| 3 | 7,6…8,0 | 4 | 7,8 | 0,33 |
| 4 | 8,1…8,4 | 3 | 8,25 | 0,25 |
| 5 | 8,5…11,5 | 1 | 10,0 | 0,083 |
| Всего | | 12 | | 1,00 |

Относительная частота равна доле распределения от всей рассматриваемой совокупности :

$$\text{ОЧ} = \frac{\text{Часть совокупности}}{\text{Вся совокупность}}.$$

Относительная частота результатов по среднему значению их значений оценки 7,6…8,0 (средняя величина 7,8%, эксперт 3) равна 0,333 или 33,3%.

$$\text{ОЧ} = \frac{\text{Часть совокупности}}{\text{Вся совокупность}} = \frac{4\times1}{12} = 0{,}3333,$$

$$\text{или в процентах – ОЧ} = \frac{4\times100}{12} = 0{,}33{,}333\%$$

В графической интерпретации это выглядит так (рис.1). По горизонтали (по оси X) отложены средние значения «интервала отклонений», по вертикали (по оси Y – распределение результатов по экспертам) – частота (гистограмма 1) или относительная частота (гистограмма 2). Ширина столбца равна величине «интервала отклонений» (средина интервала обозначена средней величиной «отклонений»).

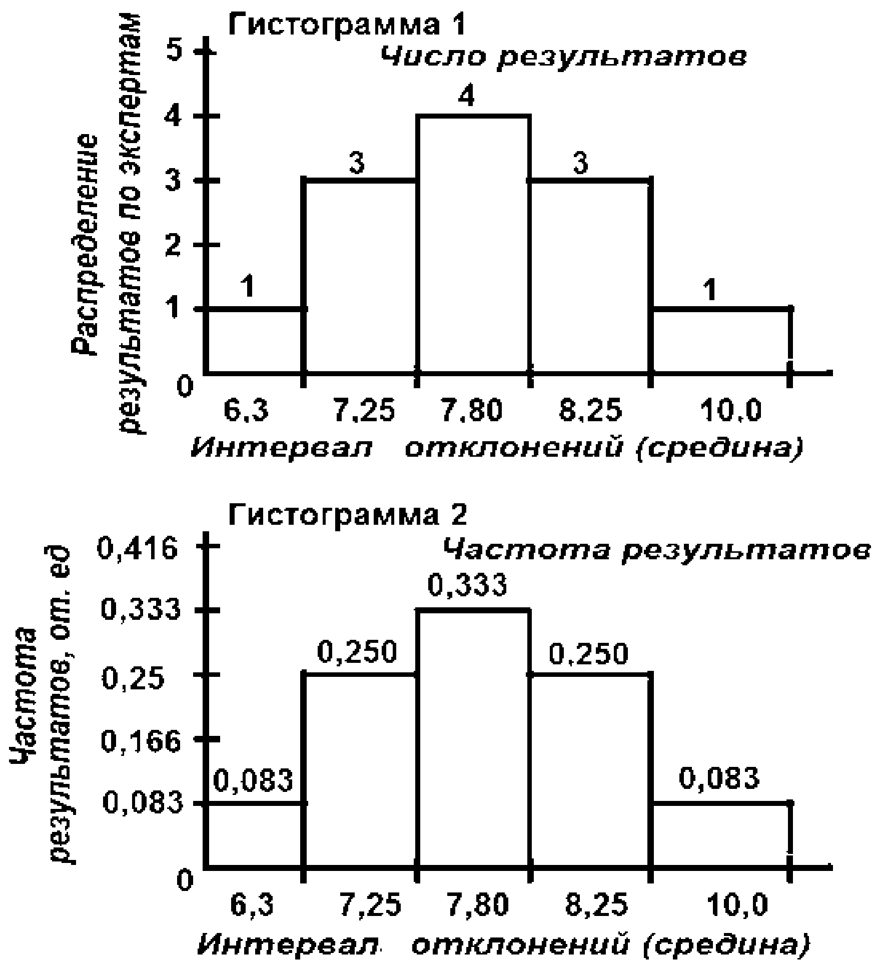


Рис.1. Гистограмма распределения результатов

## 1.3. Средняя величина

Средние величины: средняя арифметическая, средняя геометрическая и средняя гармоническая величина. Например, результат представления экспертных оценок 18 экспертов. Все эксперты распределены по трём предприятиям по 6 человек. Результаты оценки исследований представлены в табл. 5.

**Средний арифметический результат это тот**, который приходится на одного эксперта (человека) предприятия, т. е. количество экспертиз, приходящихся на одно предприятие поделённое на число экспертов. Эти величины называются средними арифметическими.

Предприятие «А»

$$\frac{86+74+54+111+53+90}{6}=87$$

Предприятие «Б»

$$\frac{89+71+67+58+110+73}{6}=78$$

Предприятие «В»

$$\frac{225+47+57+47+94}{5}=94$$

*Расчёт средних геометрической и гармонической* величин определяются по следующим выражениям.

Средняя геометрическая величина $\sqrt[n]{X_1 \times X_3 \times \ldots \times X_n}$

Средняя гармоническая величина $\bar{X}=\frac{\sum \varpi_i}{\sum \frac{\varpi_i}{X_i}}$,

где $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_n$ – значения переменных; $\varpi_I$ – результирующий показатель. Средняя гармоническая простая $\bar{X}$ применяется в тех случаях, когда произведение $a_i \times p_i$ одинаковы или равны единице ($\varpi_1=\varpi_2=\varpi_3=\cdots=\varpi_m$ или $\varpi_i=1$)

$$\boldsymbol{\bar{X}=\frac{1+1+1+\cdots+1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\frac{m}{\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{a_i}}},$$

где $a_i$ – значения вариантов в выборке; $p_i$ – частота появления в выборке.

Таблица 5

Результат оценки

| Предприятие «А» | | Предприятие «Б» | | Предприятие «В» | |
|---|---|---|---|---|---|
| Эксперт | Данные экспертизы, кол-во | Эксперт | Данные экспертизы, кол-во | Эксперт | Данные экспертизы, кол-во |
| Эксперт «А-1» | 86 | Эксперт «Б-1» | 89 | Эксперт «В-1» | 225 |
| Эксперт «А-2» | 74 | Эксперт «Б-2» | 71 | Эксперт «В-2» | 47 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Эксперт «А-3» | 54 | Эксперт «Б-3» | 67 | Эксперт «В-3» | 57 |
| Эксперт «А-4» | 111 | Эксперт «Б-4» | 58 | Эксперт «В-4» | 47 |
| Эксперт «А-5» | 53 | Эксперт «Б-5» | 110 | Эксперт «В-5» | 94 |
| Эксперт «А-6» | 90 | Эксперт «Б-6» | 73 | Эксперт «В-6» | 0 |
| ***Средний результат*** | ***78*** | ***Средний результат*** | ***78*** | ***Средний результат*** | ***94*** |

## 1.4. Медиана

В тех случаях, когда имеются слишком большие или слишком малые значения наблюдений необходимо определять не среднюю величину, а медиану. *Медиана* – значение, которое приходится на средину ряда, если разложить данные результаты в порядке возрастания или убывания.

*Например,* результат представления экспертных оценок (табл. 5).

*Предприятие «А» – 53 54 74 86 90…111*
*Предприятие «Б» – 58 67 71 73 89…110*
*Предприятие «В» – 47 47 57 94 225*

Медиана предприятия «А»: если значения середины ряда равны 74 86, тогда средняя величина, т. е. медиана равна

$$\frac{74+86}{2} = 80{,}0\ .$$

Медиана предприятия «Б»: если значения середины ряда равны 71 73, тогда средняя величина, т. е. медиана равна

$$\frac{71+73}{2} = 72{,}0\ .$$

Медиана предприятия «В»: если значения середины ряда равны 57 77, тогда средняя величина, т. е. медиана равна

$$\frac{57+94}{2} = 75{,}5\ .$$

Если ряд состоит из нечётного числа значений, то медианой будет величина, находящаяся точно по середине:

*47 47 57 94 225 – величина*
*57 – медиана*

Если ряд состоит из чётного числа значений, то медианой будет среднее значение между 3-й и 4-й (вариант предприятия «А») величинами:

*54 64 <u>74 79</u> 86…111*

*величина <u>74 79 – медиана,</u>*

*а именно* $\frac{74+79}{2} = 76,5$

### *1.5. Стандартное отклонение*

Если рассмотреть результаты оценки предприятий «А» и «Б» (см. табл.5), то очевидно, что средние величины имеют одинаковые значения – «78» (рис.2).

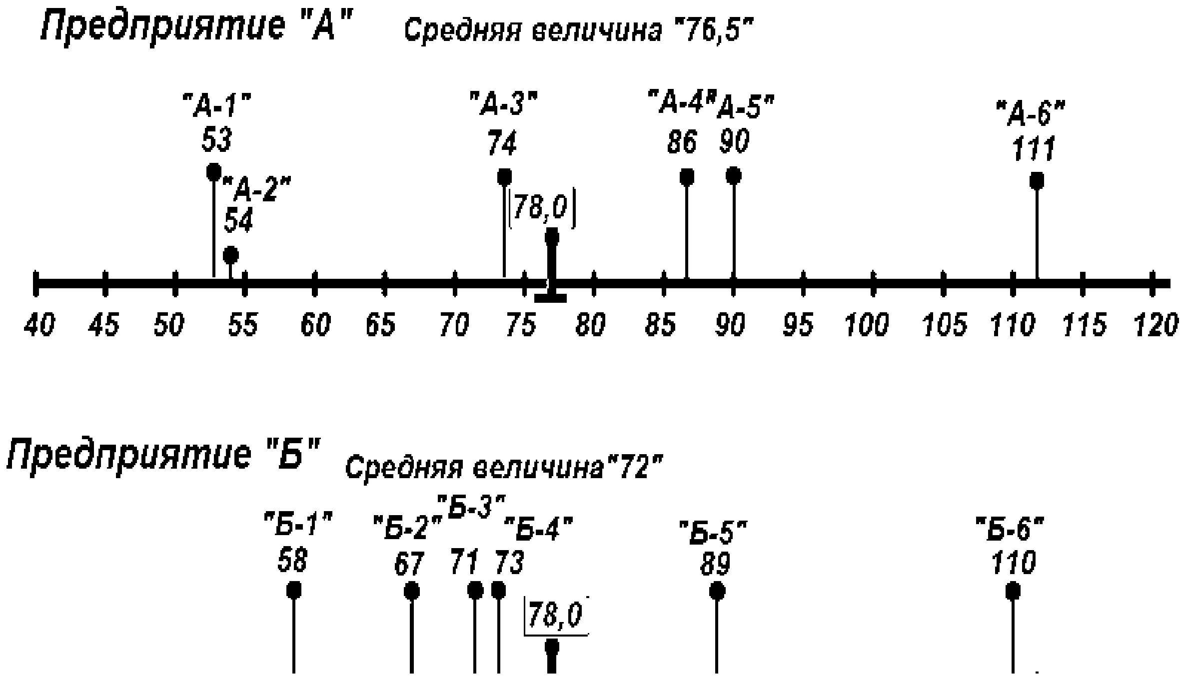


Рис.2. Шкала результатов экспертных оценок предприятий «А» и «Б»: средние величины «А» и «Б» одинаковы – «78», но ситуации, представленные по шкале сильно

Следовательно, *стандартное отклонение (СО)* это показатель, характеризующий «отдельное отличие» от средней величины. И становится очевидным, что величина отклонения не может быть меньше «нуля» (рис. 3)

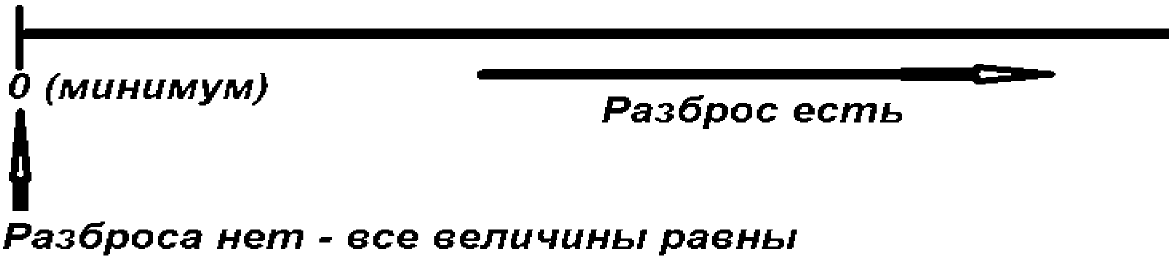

Рис. 3 Стандартное отклонение

Стандартное отклонение рассчитывается по формуле

$$\text{СО} = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{n}(\text{i−я величина −Среднее значение})^2}{\text{n значений (общее количество результатов)}}}$$

Стандартное отклонение результатов оценки предприятия «А» равно

$$\text{СО}_{\text{"А"}} = \sqrt{\frac{(86-78)^2+(74-78)^2+(54-78)^2+(111-78)^2+(53-78)^2+(90-78)^2}{6}} = 20{,}47$$

Стандартное отклонение результатов оценки предприятия «Б» равно

$$\text{СО}_{\text{"Б"}} = \sqrt{\frac{(89-78)^2+(71-78)^2+(67-78)^2+(58-78)^2+(110-78)^2+(73-78)^2}{6}} = 17{,}03$$

Стандартное отклонение результатов оценки предприятия «В» равно

$$\text{СО}_{\text{"В"}} = \sqrt{\frac{(225-94)^2+(47-94)^2+(57-94)^2+(47-94)^2+(94-94)^2}{5}} = 79{,}73\ .$$

Совершенно очевидно, что больший разброс результатов – отдельное отклонение от средней величины, будет на предприятии «В» против показателей предприятии «А» и «Б» (20,47 и 17,03).

Формула для расчёта стандартного отклонения записывается в виде

$$\text{СО} = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{n}(\text{i−е значение −Среднее значение})^2}{\text{n значений (общее количество)}}}$$

или

$$\text{СО} = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{n}(\text{i−е значение −Среднее значение})^2}{\text{n значений (общее количество)}-1}},$$

где от общего количества значений вычитается 1.

Первая формула применяется при вычислении стандартного отклонения *генеральной* совокупности, а вторая – при определении стандартного отклонения при *выборочной* совокупности. При этом генеральная совокупность – вся изучаемая группа людей или объектов (событий), а выборочная совокупность это группа людей или объектов отобранных из генеральной совокупности. Например, как результаты, представленные в табл. 5. В практике обычно такие данные собрать не представляется возможным (данные генеральной совокупности), поэтому почти всегда применяется

вторая формула $\text{СО} = \sqrt{\frac{\sum_{i}^{n}(\text{i–е значение –Среднее значение})^2}{\text{n значений (общее количество)}-1}}$ .

## 1.6. Вероятность. Вычисление вероятности

***Функция распределения плотности вероятности.*** При обработке результатов любого типа информации очень часто применяется термин «вероятность» чего-либо. «Данная информация маловероятна» или «вероятна». Вероятность события меньше «0,05» (или «0,002,» «0,08» …) Что необходимо знать, чтобы вычислить вероятность события, результатов оценки информации и т. д…?

Например результат оценки экспертами экономического состояния предприятий металлургической промышленности. Удалось оценить 575 предприятий со средним «положительным» результатом (стабильного функционирования) – 53. При этом стандартное отклонение равно 10. Результат оценки в виде гистограммы будет выглядеть так, рис. 4.

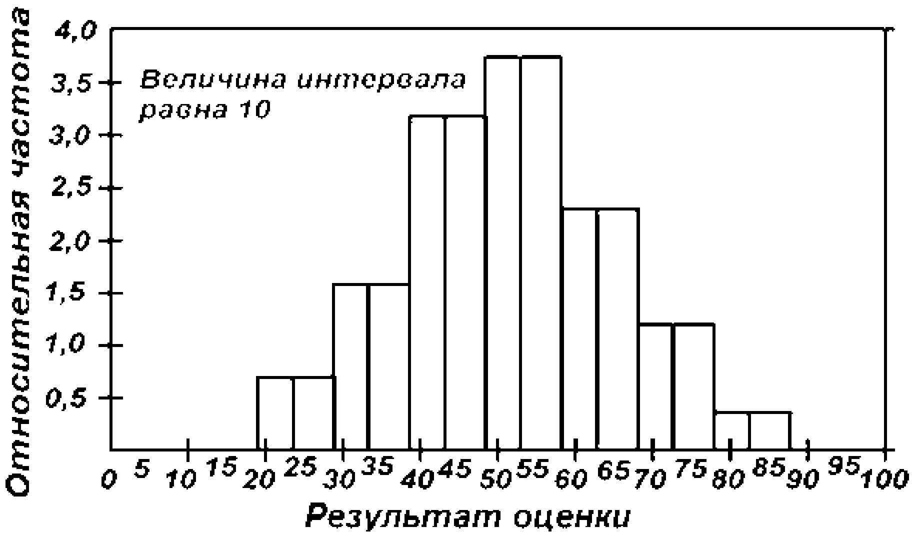


Рис. 4. Гистограмма «результатов оценки»

Математической основой теории статистических выводов является теория вероятностей Статистикой называется правило вычислений «функция – значение», полученное на его основе. Пусть $y$ – является случайной переменной величиной при эксперименте (наблюдение за изучаемым явлением). Например, результат оценки экспертами экономического состояния предприятий металлургической промышленности.

Случайные переменные могут быть дискретными или непрерывными. Т.е., если множество значений случайной переменной ***y*** – конечно или бесконечно, но счётно (т. е. можно всегда определить, сколько было результатов оценки), то случайная переменная дискретна и её вероятностная структура описывается распределением вероятностей ***p(y)***. А если множество всех возможных значений ***y*** заполняет собой интервал (или несколько интервалов), то случайная переменная непрерывна и её вероятностная структура характеризуется плотностью распределения вероятностей ***f(y).*** В этом случае, *среднее* $\mu$ случайной величины есть *мера положения центра* её распределения на числовой оси. Математически среднее определяется как

$$\mu = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy & y - \text{непрерывная} \\ \sum_{\text{всему}} yp(y) & y - \text{дискретная} \end{cases}$$

*Среднюю величину* $\mu$ можно также выразить и в терминах математического ожидания или результата усреднения по достаточно большому интервалу значений переменной ***y***

$$\mu = E(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy & y - \text{непрерывная} \\ \sum_{\text{всему}} yp(y) & y - \text{дискретная} \end{cases}$$

где *E* – оператор математического ожидания.

*Широта (диапазон)* распределения вероятностей или рассеивание случайной величины может характеризоваться *дисперсией (раздробленностью),* которая определяется как

$$\sigma^2 = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (y - \mu)^2 f(y)dy, & y - \text{непрерывна,} \\ \sum_{\text{по всему } y} (y - \mu)^2 p(y), & y - \text{дискретна} \end{cases}$$

Дисперсия может быть выражена и через *математическое ожидание*

$$\sigma^2 = E[(y-\mu)^2],$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – середина случайной величины.

Понятие дисперсии (раздробленности) используется широко и поэтому удобно ввести оператор дисперсии *V(y)*

$$\sigma^2 = E[(y-\mu)^2] = V(y).$$

*Операторы математического ожидания и дисперсии* применяются очень часто, и поэтому может оказаться полезной сводка элементарных свойств этих операторов (табл. 6).

*Выборки и выборочные распределения.* Целью теории статистических выводов является *вывод о некоторой совокупности, используя выборку из неё.* Т. е. выборка основана на том, *что необходимо предположить при использовании случайных величин.* Если вся наблюдаемая (исследуемая) совокупность состоит из *N*- элементов, а берётся выборка из $n$-элементов, то каждая из $\frac{N!}{(N-n)!n!}$ возможных выборок может быть изменена с равной вероятностью. *Такая процедура называется взятием случайной выборки.*

Таблица 6

Операторы математического ожидания и дисперсии

| Наименование оператора | Математическое выражения оператора | Примечание |
|---|---|---|
| 1. Оператор математического ожидания постоянной величины | $E(c) = c$ (Const – константа) | $c$ – постоянная величина $y$ – случайная переменная $\sigma^2$ – дисперсия математического ожидания |
| 2. Оператор математического ожидания средней случайной величины | $E(y) = \mu$ | |
| 3. Оператор математического ожидания множества постоянной и средней случайной величины | $E(c\,y) = cE(y) = c\mu$ | |
| 4. Оператор дисперсии постоянной величины | $V(c) = 0$ | |
| 5. Оператор дисперсии математического ожидания случайной переменной | $\sigma^2 = V(y)$ | |
| 6. Оператор дисперсии математического ожидания случайной и постоянной величины | $V(cy) = c^2V(y) = c^2\sigma^2$ | |

Окончание табл. 6

| Наименование оператора | Математическое выражения оператора | Примечание |
|---|---|---|
| 7. Оператор математического ожидания множества средних случайных переменных | $E(y_1 + y_2) = E(y_1) + $ $+E(y_2) = \mu_1 + \mu_2$ | $y_1$– случайная величина 1 (один); $y_2$ – случайная величина **2** (два). Переменные $y_1$ *и* $y_2$ – есть мера независимости, т.е. если $y_1$ *и* $y_2$ – независимые переменные, то $C_{oV}(y_1, y_2) = 0$. Из условия $C_{oV}(y_1, y_2) = 0$ не следует независимость. Если $y_1$ – случайная величина 1**;** $y_2$ – случайная величина 2 *независимы* |
| 7.1. Оператор математического ожидания средней случайной величины $y_1$ | $E(y_1) = \mu_1$ | |
| 7.2. Оператор дисперсии математического ожидания случайной переменной $y_1$ | $\sigma_1^2 = V(y_1)$ | |
| 7.3. Оператор математического ожидания средней случайной величины $y_2$ | $E(y_2) = \mu_2$ | |
| 7.4. Оператор дисперсии математического ожидания случайной переменной $y_2$ | $\sigma_2^2 = V(y_2)$ | |
| 8. Оператор дисперсии математического ожидания случайной переменной $y_1$ *и* $y_2$ | $V(y_1 + y_2) = V(y_1) + V(y_2) +$ $+2C_{oV}(y_1, y_2)$ | |
| 8.1. Ковариация случайных переменных $y_1$ и $y_2$ | $C_{oV}(y_1, y_2) = E[(y_1 - \mu_1) \times$ $\times (y_2 - \mu_2)]$ | |
| 9. Оператор дисперсии математического ожидания случайной переменной $y_1$ *и* $y_2$ | $V(y_1 - y_2) = V(y_1) + V(y_2) -$ $-2C_{oV}(y_1, y_2)$ | |
| 10. Оператор дисперсии математического ожидания случайной переменной при условии, что $y_1$ *и* $y_2$ независимы | $V(y_1 \mp y_2) = V(y_1) + V(y_2) =$ $= \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ | |
| 11. Оператор математического ожидания средней случайной величины $y_1$ и средней случайной величины $y_2$ | $E(y_2 \text{ и } y_2) == E(y_2)E(y_2) = \mu_1\mu_2$ | *Независимы переменные или нет* $y_1$ – случайная величина 1 и $y_2$ – случайная величина 2 |
| 12. В общем случае оператор *математического ожидания* средней случайной величины $y_1$ и $y_2$ | $E\frac{y_1}{y_2} \neq \frac{E(y_1)}{E(y_2)}$ | |

На практике *«получения случайных выборок»* встречаются трудности, и при этом могут быть полезны таблицы случайных чисел. *Форма записи* $\frac{N!}{(N-n)!n!}$ *осуществлена через факториал.* «*Факториалом» в математике называют произведение всех натуральных чисел, включая указанное число. Обозначается факториал восклицательным знаком после числа, например:* 4! = 1×2×3×4 = 24. *В общем виде формулу для нахождения факториала можно записать так:* n! = 1×2×3×4·…(n-2)×(n-1)×n. *Необходимо иметь виду, что факториал определён только для натуральных чисел и нуля. Факториал нуля и единицы это* «1»: 0! = 1; 1! = 1. *Термин «факториал»* *ввел в 1800 году французский математик Аргобаст Луи Франсуа Антуан. Обозначение n! придумал чуть позже немецкий математик Кристиан Крамп в 1808 году.*

## 1.7. Ряды распределения и величина интервала

Для более полного усвоения понятий «ряды распределения» и «гистограмма» необходимо ещё раз проанализировать характеристику «Результатов экспертной оценки», табл.4.

Интервал «отклонений» результатов оценки равен:

у 1-го эксперта – 1,2; 2-го – 0,5; 3-го – 0,4; 4-го – 0,3; 5-го – 3,0. Эта величина, конечно, не является стандартом, так представили те, кто анализируют данные. В этом случае уместно утверждение: «ряды распределений, построенные на основе субъективных решений неубедительны и математического способа определения интервала нет. Нет, есть. Вот алгоритм решения по шагам.

*Шаг 1.* Количество интервалов (КИ) определяется по формуле Стерджесса:

$$\text{КИ} = 1 + \frac{\lg N}{\lg 2} = 1 + \frac{\lg 12}{\lg 2} = 1 + 3{,}584962 = 4{,}58496 \approx 5{,}0,$$

где $N$ – количество значений в совокупности; 2 – число значений в рассматриваемом интервале.

*Шаг 2.* Величина интервала (ВИ) определяется по соотношению

$$\text{ВИ} = \frac{\text{Max} - \text{Min}}{\text{КИ}} = \frac{11{,}5 - 5{,}7}{5} = 1{,}16 \approx 1{,}0,$$

где Max – максимальное значение в совокупности; Min – минимальное значение в совокупности.

Результаты расчётов по определению количества интервалов (КИ) и величины интервалов (ВИ) приведены в табл. 7. Не исключено, что данные приведённые в таблице покажутся менее привлекательными.

Таблица 7

Распределение результатов оценки экспертов (данные расчёта)

| Расчёт интервала отклонений от средней величины | Середина интервала | Распределение результатов по экспертам (реальная частота) | Распределение результатов по экспертам (относительная частота) |
|---|---|---|---|
| 5,7+1,16=6,86 | 3,430 | 1 | 0,0833 |
| 6,86+1,16=8,03 | 4,015 | 3 | 0,25 |
| 8,03+1,16=9,19 | 4,595 | 4 | 0,333 |

Окончание табл. 7

| Расчёт интервала отклонений от средней величины | Середина интервала | Распределение результатов по экспертам (реальная частота) | Распределение результатов по экспертам (относительная частота) |
|---|---|---|---|
| 9,19+1,16=10,35 | 5,175 | 3 | 0,25 |
| 10,35+1,16=11,51 | 5,755 | 1 | 0,0833 |
| Итого | | 12 | 1,00 |

При этом возможно, возникнуть такие вопросы: «Почему величина интервала равна именно ВИ=1,0…1,16?». «Что эта за формула *Стерджесса»*? И почему интервалы распределены таким непонятным образом»?! Кроме того, считать, определять и т. д. – всегда дополнительные хлопоты. Случаи, когда распределение непонятно, даже если величина интервала определена математическим способом, встречаются часто. Здесь уместно вспомнить то, о чём шла речь при освоении понятия «ряды распределения изучения». Следовательно, вполне достаточно выбрать такую величину интервала, которая будет понятна тем, кто проводит статистический анализ.

*Теория оценивания и описательный метод.* Итак, рассматривая основные понятия в теоретическом представлении «ошибок» (погрешностей) как раздела *математической статистики*, можно предположить, что это изучение большой совокупности однородных объектов на основании их выборочного исследования. Но это не совсем так, так как при статистической оценке в данном случае необходимо выделять два раздела: теорию оценивания и описательную статистику. В предыдущих разделах речь шла о теории оценивания.

*Тогда что же такое описательный метод?* Описательная статистическая оценка результатов это набор методов по упорядочиванию данных с целью наиболее простого и ясного восприятия этих данных. Можно считать, что описательная оценка статистических данных рассматривает выборку как генеральную совокупность. Вот пример. В рассматриваемых выше случаях (табл. 5), результат представления экспертных оценок 18 экспертов, например предприятия «А» и стандартное отклонение есть показатели, чтобы представить положение в эксперта в наглядном виде. Именно такое представление результатов оценки и есть описательная.

## 1.8. Нормальное распределение

Аналитически нормальное распределение можно записать так

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi * \text{Стандартное отклонение}}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\text{Стандартное отклонение}}\right)^2},$$

где $\bar{x}$ – средняя величина показателей $x_i$ (средняя ряда), символ *«е»* – математическая константа (основание натурального логарифма – число Эйлера или Непера, *«е»=2,7182*).

График функции распределения вероятности имеет следующие свойства.

1. Кривая симметрична относительно центра распределения, который находится в точке, соответствующей среднему значению.

2. Функция зависит от среднего значения и от стандартного отклонения.

Несколько видов функций приведены на рис. 5.

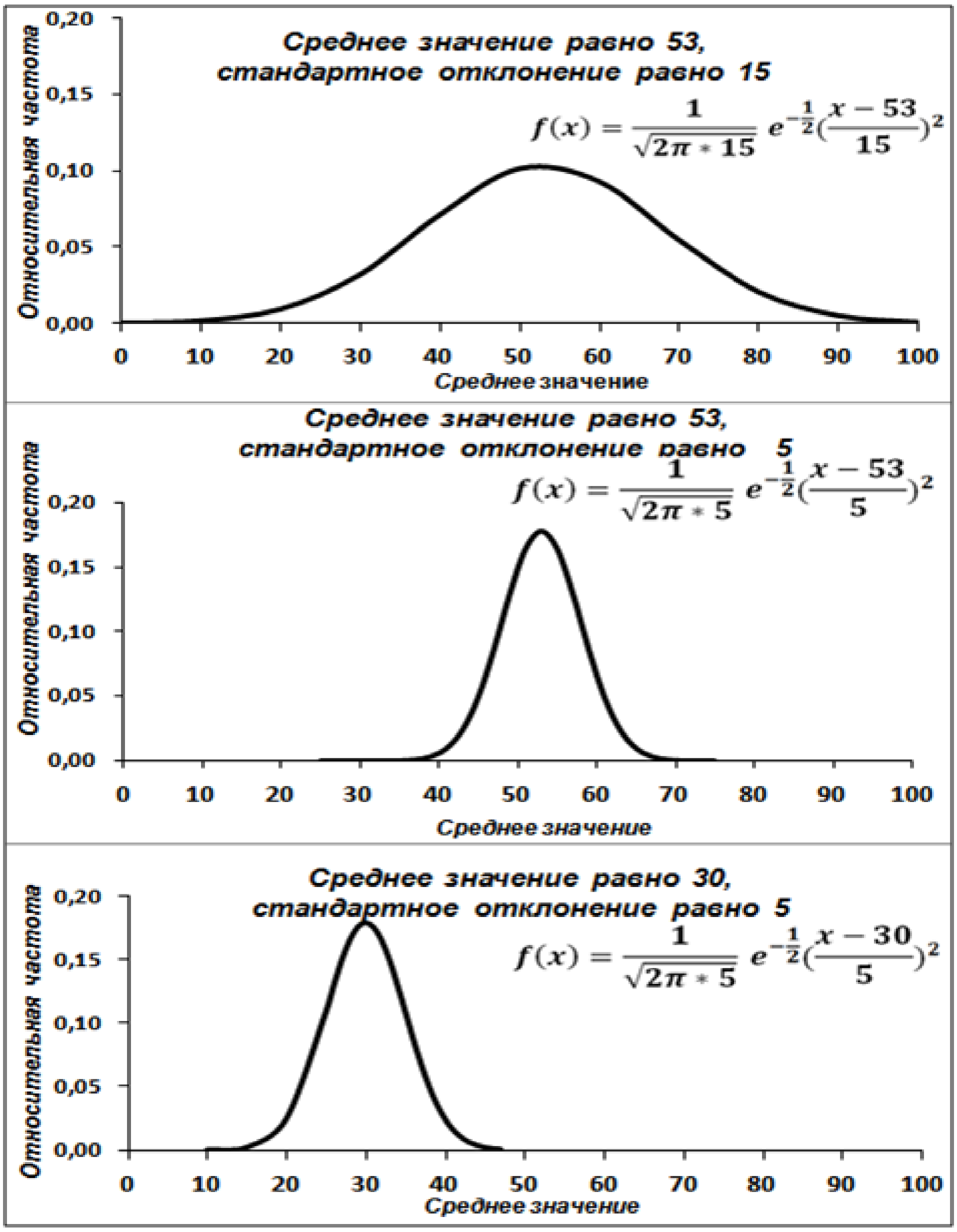


Рис. 5. Виды функций распределения вероятности

***Наблюдения.*** При экспертной оценке статистических наблюдений определяются как любая функция от множества результатов, не содержащих неизвестные параметры. Например, $\boldsymbol{y_1, y_2, y_3, y_3 \dots y_n}$, представляют собой выборку некоторых оценочных показателей.

Тогда *выборочное среднее будет определено так*

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

а *выборочная дисперсия*

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

или *выборочное стандартное (среднеквадратичное) отклонение*

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}\,.$$

*Выборочное среднее и выборочная дисперсия* и будут являться «*статистиками» при оценке экспертных результатов*. Эти величины соответственно и будут *характеризовать* положение *центра и рассеивание выборки (дисперсию).*

Существует правило, согласно которому распределение величины $\boldsymbol{x}$, при определённых значениях средней ряда (или среднего значения $\bar{\boldsymbol{x}}$) и стандартного отклонения называют нормальным распределением, если плотность распределения вероятностей выражается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \times \text{Стандартное отклонение}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{\text{Стандартное отклонение}}\right)^2}$$

Часто оказывается возможным найти *распределение вероятностей данной статистики, если известно распределение для совокупности,* из которой была взята выборка. Распределение вероятностей *статистики* называется *выборочным распределением*. Одним из наиболее важных выборочных распределений является *нормальное распределение*. Если $\boldsymbol{y}$ – *нормальная случайная величина,* то её *плотность распределения вероятностей* имеет вид

$$f(y) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-\mu}{\sigma}\right]^2}, \quad (-\infty < \mu < \infty)$$

или

$$f(y) = \frac{1}{\sigma \times \sqrt{2\pi}} e^{-\left[\frac{y-\mu}{2\sigma}\right]^2}, \quad (-\infty < \mu < \infty)$$

где $(-\infty < \mu < \infty)$ – среднее и $\boldsymbol{\sigma^2 > 0}$ – дисперсия.

Кривая нормального распределения приведена на рис. 6.

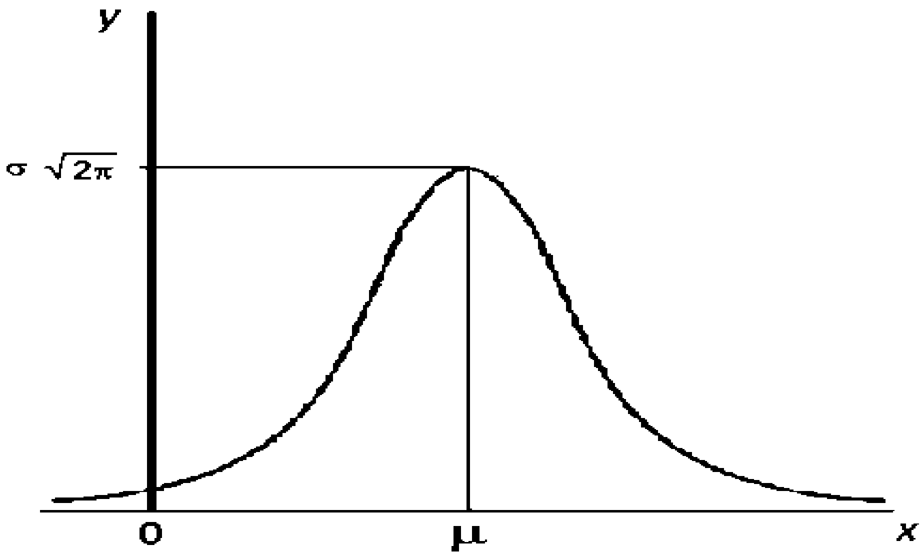


Рис. 6. Кривая нормального распределения

***Функция Лапласа.*** Нормальное распределение называют Лапласовским распределением.

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Функцию Лапласа называют *«функцией ошибок»* с обозначением *erf(x)* (ограниченное применение). *Другой вид функции носит название «Нормированная функция Лапласа»*

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{1\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Оба этих выражения связаны между собой следующими соотношениями

$$\overline{\Phi}(x) = \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \text{ или } \overline{\Phi}\left(\frac{x}{\sum 2}\right) = \frac{1}{2}\Phi(x)$$

Для того чтобы определить попадание некоторых случайных величин подчинённых закону случайного распределения на участок числовой оси *от $a$ до $b$ – участок $(a, b)$* используется функция ЛАПЛАСА в следующей интерпретации

$$P(a < x < b) = \frac{1}{2}\left[\left(\Phi\frac{b-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \left(\Phi\frac{a-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right].$$

На практике часто используется сокращённое обозначение $\mathbf{y} \cong \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2)$ т. е. переменная $\boldsymbol{y}$ распределена по нормальному закону со средним $\boldsymbol{\mu}$ и дисперсией $\boldsymbol{\sigma}^2$ Частным случаем *нормального распределения* является *стандартизованное нормальное распределение*, а именно при $\boldsymbol{\mu}$=**0** и $\boldsymbol{\sigma}^2 = \mathbf{1}$.

В таблице 8. Приведена кумулятивная функция стандартизированного нормального распределения

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^{2/2du}}$$

Таблица 8

Кумулятивная функция стандартизированного нормального распределения

| **Z** | **0,00** | **0,01** | **0,02** | **0,03** | **0,04** | **0,05** | **0,06** | **0,07** | **0,08** | **0,09** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,0** | 0,50000 | 0,50399 | 0,50799 | 0,51197 | 0,51595 | **0,51994** | 0,52392 | 0,52790 | 0,51388 | 0,53586 |
| **0,1** | 0,53983 | 0,54979 | 0,54776 | 0,55172 | 0,55567 | 0,55962 | 0,56356 | 0,56749 | 0,57142 | 0,57534 |
| **0,2** | 0,57926 | 0,58317 | 0,58706 | 0,59095 | 0,59483 | 0,59871 | 0,60257 | 0,60642 | 0,61026 | 0,61409 |
| **0,3** | 0,61791 | 0,62172 | 0,62551 | 0,62930 | 0,63307 | 0,63683 | 0,64058 | 0,64431 | 0,64803 | 0,65173 |
| **0,4** | 0,65542 | 0,65910 | 0,66276 | 0,66640 | 0,67003 | 0,67364 | 0,67724 | 0,68082 | 0,68438 | 0,68793 |
| **0,5** | 0,69146 | 0,69497 | 0,69847 | 0,70194 | 0,70540 | **0,70884** | **0,71226** | 0,71566 | 0,71904 | 0,72240 |
| **0,6** | 0,72575 | 0,72907 | 0,73237 | 0,73565 | 0,73891 | 0,74215 | 0,74537 | 0,74857 | 0,75175 | 0,75490 |
| **0,7** | 0,75803 | 0,76115 | 0,76424 | 0,76730 | 0,77035 | 0,77337 | 0,77637 | 0,77935 | 0,78230 | 0,78523 |
| **0,8** | 0,78814 | 0,79135 | 0,79389 | 0,79673 | 0,79954 | 0,80234 | 0,80510 | 0,80785 | 0,81057 | 0,81327 |
| **0,9** | 0,78814 | 0,79103 | 0,82121 | 0,82381 | 0,82639 | 0,82894 | 0,83147 | 0,83397 | 0,83646 | 0,83891 |
| **1,0** | 0,84134 | 0,84375 | 0,84613 | 0,84849 | 0,85083 | 0,85314 | **0,85543** | 0,85769 | 0,85993 | 0,86214 |
| **1,1** | 0,86433 | 0,86650 | 0,86864 | 0,87076 | 0,87285 | 0,87493 | 0,87697 | 0,87900 | 0,88100 | 0,88297 |
| **1,2** | 0,88493 | 0,88686 | 0,88877 | 0,89065 | 0,89251 | 0,89435 | 0,89616 | 0,89796 | 0,89973 | 0,90147 |
| **1,3** | 0,90320 | 0,90490 | 0,90658 | 0,90824 | 0,90988 | 0,91149 | 0,91308 | 0,91465 | 0,91621 | 0,91773 |
| **1,4** | 0,91924 | 0,92073 | 0,92219 | 0,92364 | 0,92506 | 0,92647 | 0,92785 | 0,92922 | 0,93056 | 0,93189 |
| **1,5** | 0,93319 | 0,93448 | 0,93574 | 0,93699 | 0,93822 | 0,93943 | 0,94062 | 0,94179 | 0,94295 | 0,94408 |
| **1,6** | 0,94520 | 0,94630 | 0,94738 | 0,94845 | 0,94950 | 0,95053 | 0,95154 | 0,95254 | 0,95352 | 0,95448 |
| **1,7** | 0,95543 | 0,95637 | 0,95728 | 0,95818 | 0,95907 | 0,95994 | 0,96080 | 0,96164 | 0,96246 | 0,96327 |
| **1,8** | 0,96407 | 0,96485 | 0,96562 | 0,96637 | 0,96711 | 0,96784 | 0,96856 | 0,96926 | 0,96995 | 0,97062 |
| **1,9** | 0,97128 | 0,97193 | 0,97257 | 0,97320 | 0,97381 | 0,97441 | 0,97500 | 0,97558 | 0,97615 | 0,97670 |
| **2,0** | 0,97725 | 0,97778 | 0,97831 | 0,97882 | 0,97932 | 0,97982 | 0,98030 | 0,98077 | 0,98124 | 0,98169 |

Окончание табл. 8

| Z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **2,1** | 0,98214 | 0,98257 | 0,98300 | 0,98341 | 0,98382 | 0,98422 | 0,98461 | 0,98500 | 0,98537 | 0,98574 |
| **2,2** | 0,98610 | 0,98645 | 0,98679 | 0,98713 | 0,98745 | 0,98778 | 0,98809 | 0,98840 | 0,98870 | 0,98890 |
| **2,3** | 0,98928 | 0,98956 | 0,98983 | 0,99010 | 0,99036 | 0,99061 | 0,99086 | 0,99111 | 0,99134 | 0,99158 |
| **2,4** | 0,99180 | 0,99202 | 0,99224 | 0,99245 | 0,99266 | 0,99286 | 0,99305 | 0,99324 | 0,99343 | 0,99361 |
| **2,5** | 0,99379 | 0,99396 | 0,99413 | 0,99430 | 0,99446 | 0,99461 | 0,99477 | 0,99492 | 0,99506 | 0,99520 |
| **2,6** | 0,99534 | 0,99547 | 0,99560 | 0,99573 | 0,99585 | 0,99598 | 0,99609 | 0,99621 | 0,99632 | 0,99643 |
| **2,7** | 0,99653 | 0,99664 | 0,99674 | 0,99683 | 0,99693 | 0,99702 | 0,99711 | 0,99720 | 0,99728 | 0,99736 |
| **2,8** | 0,99744 | 0,99752 | 0,99760 | 0,99767 | 0,99774 | ***0,99781*** | 0,99788 | 0,99795 | 0,99701 | 0,99807 |
| **2,9** | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | ***0,99841*** | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |
| **3,0** | 0,99865 | 0,99869 | 0,99874 | 0,99878 | 0,99882 | 0,99886 | 0,99889 | 0,99893 | 0,99897 | 0,99900 |
| **3,1** | 0,99903 | 0,99906 | 0,99910 | 0,99913 | 0,99916 | 0,99918 | 0,99921 | 0,99924 | 0,99926 | 0,99924 |
| **3,2** | 0,99931 | 0,99934 | 0,99936 | 0,99939 | 0,99940 | 0,99942 | 0,99944 | 0,99946 | 0,99948 | 0,99950 |
| **3,3** | 0,99952 | 0,99953 | 0,99955 | 0,99957 | 0,99958 | 0,99960 | 0,99961 | 0,99962 | 0,99964 | 0,99965 |
| **3,4** | 0,99966 | 0,99968 | 0,99969 | 0,99970 | 0,99971 | 0,99972 | 0,99973 | 0,99974 | 0,99975 | 0,99976 |
| **3,5** | 0,99977 | 0,99978 | 0,99979 | 0,99980 | 0,99981 | 0,99981 | 0,99982 | 0,99983 | 0,99983 | 0,99984 |
| **3,6** | 0,99984 | 0,99985 | ***0,99985*** | ***0,99986*** | 0,99986 | ***0,99987*** | 0,99987 | 0,99988 | 0,99988 | 0,99989 |
| **3,7** | 0,99989 | 0,99990 | ***0,99990*** | ***0,99990*** | 0,99991 | ***0,99992*** | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 | 0,99992 |
| **3,8** | 0,99993 | 0,99993 | 0,99993 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99994 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 | 0,99995 |
| **3,9** | 0,99995 | 0,99995 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99996 | 0,99997 | 0,99997 |

*Необходимые коментарии.* Если величина статистики равна $z = 1,06$, то это значение можно представить в виде суммы двух чисел z= 1,00 + 0,06 =1,06. Десятые и сотые доли величины z необходимо представить так, чтобы по горизонтали (табл. 8) z= 0,06, а по вертикали – z= 1,00. На пересечении горизонтальных и вертикальных значений величины z в соответствующей ячейки стоит число 0,85543. Это и будет площадь заштрихованного участка под кривой в относительных единицах за минусом 0,5 – соответствующей площади под кривой с отрицательными величинами средней $\mu$. Таким образом, площадь под кривой будет равна 0,85543–0,5=0,35543 (рис. 7).


Рис. 7. Кривая стандартного распределения с оценкой площади

Как при нормальном распределении, так и при любом другом площадь области, ограниченной осью $x$ и всей кривой распределения равна 1 (рис. 8). А площадь области ограниченной кривой стандартного нормального распределения и осью $x$, равна «доле вероятности». Вот два примера.

*Пример 1.* Предприятия лёгкой промышленности проходили аудиторскую проверку по отклонению отчётных данных от данных проверки. После обработки данных проверки выявлено, что распределение результатов можно считать нормальным при среднем значении 45% и стандартном отклонении 10. При этом необходимо обратить внимание на следующие утверждения.

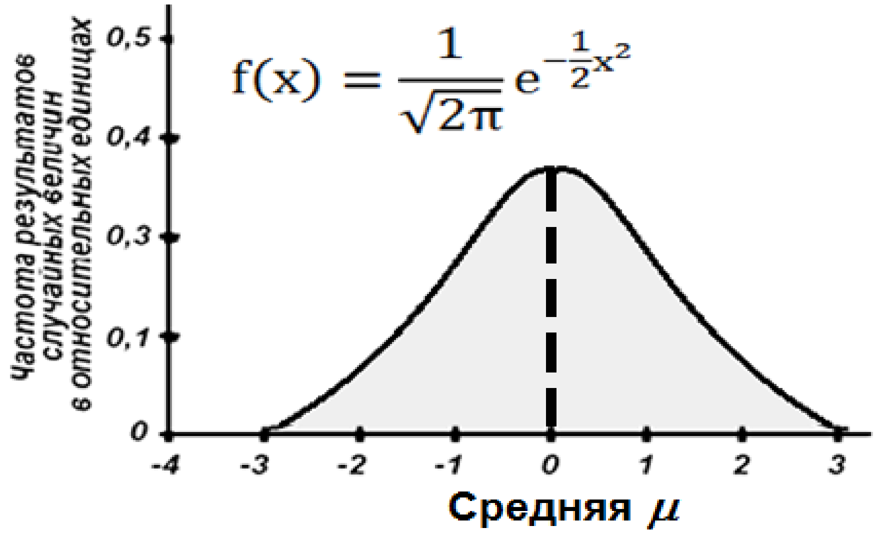


Рис. 8. Кривая стандартного распределения с максимальной площадью

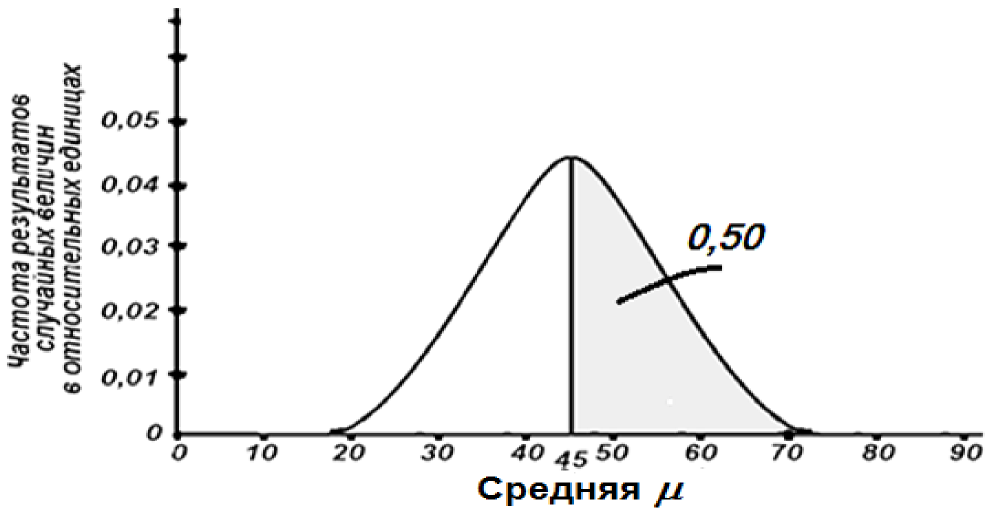


Рис. 9. Кривая стандартного распределения с площадью равной 0,50

1. При нормальном распределении, когда среднее значение равно 45% и стандартном отклонении 10, площадь заштрихованной области равна 0,50 (рис. 9).

2. Для предприятий, чей результат отклонений был больше 45%, составляет 50% от общего числа проверенных.

3. Если предположить, что из общего числа предприятий произвольно выбрать только одно, то вероятность того, что это предприятие имеет результат оклонения больше 45% равна 50%.

4. Для стандартного нормального распрепделения, после нормирования результатов проверки доля предприятий с результатом больше 0% составляет 50% от общего числа проверяемых (рис. 9).

5. Если предположить, что из общего числа предприятий произвольно выбрать одно, у которого результат положительный (*отклонение отчётных данных не более 25%*) составляет 50% (рис. 9).

Среднее значение отклонений результатов проверки составило 45% и поэтому кривая имеет максимум в точке, соотетсвующей среднему значению и симметрична относительно максимума (рис. 8 и 9). Если отклонение составило больше 45%, то получается целиком площадь под правой стороны гистограммы.

*Пример 2.* Предприятия лёгкой промышленности проходили аудиторскую проверку по отклонению отчётных данных от данных проверки. После обработки результатов проверки, выявлено, что средний результат составил 45% при стандартном отклонении 10. Используя понятие «стандартного нормального распределения» будут очевидны следующие пять выводов.

1. При нормальном распределении, когда среднее значение равно 45%, а стандартное отклонение равно 10, площадь заштрихованной на гистограмме области (рис.10) равна: 1,00-0,96407=0,3593 (см. табл. 8).

2. Доля предприятий, чей результат больше 63% равна: 1,00 – 0,96407=0,3593 или 3,593% (рис. 10).

3. Если из общего предприятий произвольно выбрать одно, то вероятность того, что это предприятие имеет процент отклоней больше 63% равна: 1,00– 0,96407=0,3593 или 3,593%.

4. При нормальном распределении доля предприятий с нормированным отклонением результатов проверки больше 1,8% составит 3,593% (0,03593) (рис. 10).

5. Вероятность того, что доля предприятий, чьё нормальное отклонение больше 1,8, равна 3,593%.

$$> 1{,}8 = \frac{18}{10} = \frac{63-45}{10} = \frac{\text{Анализируемое значение–Средняя величина}}{\text{Стандартное отклонение}}$$

На практике часто используется сокращённое обозначение, а именно – $y \cong N(\mu, \sigma^2)$, т. е. переменная $\boldsymbol{y}$ распределена по *нормальному закону* со средним $\mu$) и *дисперсией* $\sigma^2$)**.** *Нормальное распределение играет центральную роль при статистической обработке данных наблюдений.*

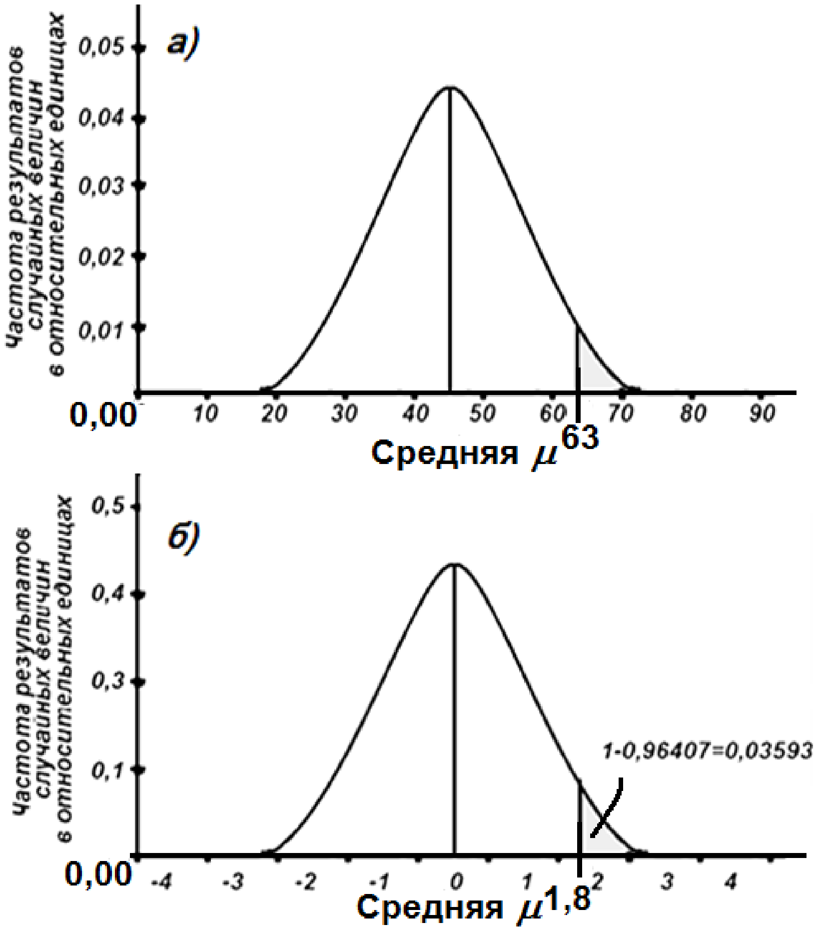


Рис. 10. Кривая стандартного распределения с площадью равной 0,03593:
*а) в %-м исчислении; б) в долевом (относительном) исчислении*

Частным случаем *нормального распределения* является *стандартизованное нормальное распределение*, а именно при $\mu = 0$, и $\sigma = 1$). Тогда очевидно, что если выполняется условие $y \cong N(\mu, \sigma^2)$, то *случайная переменная (или стандартизованное нормальное распределение* $y$*)*, т. е. величина **z**, которая определяется как

$$z = \frac{y-\mu}{\sigma}$$

подчиняется стандартизированному нормальному распределению, т. е. $z \cong N(0, 1^2)$. Стандартизованное нормальное распределение $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$ называется нормированным, а кумулятивной функцией распределения – интегральной (или просто функцией распределения), см. табл.8. *Для методов статистической обработки* исходным является допущение, что случайная переменная распределена по нормальному закону. Обоснованием такого допущения является *центральная предельная теорема.*

***Центральная предельная теорема.*** Если $y_1, y_1, y_1, ..y_n$, есть последовательность $\boldsymbol{n}$ независимых случайных переменных с конечными средними $E(y_i) = \mu_i$ и дисперсиями $V(y_i) = \sigma_i^2$, то величина

$$z_n = \frac{x - \sum_i^n \mu_i}{\sum_i^n \sigma_i^2}$$

распределена приближённо по закону $\boldsymbol{z \cong N(0, 1^2)}$ в том смысле, что если $F_n(z)$ – функция распределения $z_n$, а $\Phi(z)$ – *функция распределения стандартизованной нормальной переменной*, то $\boldsymbol{lim_{n\to\infty}\left[\frac{F_n(z)}{\Phi(z)}\right] = 1}$.

Утверждение этой теоремы состоит, в сущности, в том, что сумма $\boldsymbol{n}$ независимых случайных переменных распределена приближённо *по нормальному закону.* Во многих случаях приближение оказывается хорошим при небольших $\boldsymbol{n}$ (например, для $\boldsymbol{n<10}$), в большинстве же случаях необходимы большие величины $\boldsymbol{n}$ (например, для $\boldsymbol{n>100}$). Часто считается, что «ошибка» (погрешность) наблюдений, эксперимента, результата оценки и т.п., образуется аддитивным образом из нескольких независимых источников. И, следовательно, *нормальное распределение* является приемлемой моделью суммарной погрешности («ошибки»).

### 1.9. Хи-квадрат распределение ($\chi^2$ – распределение)

Если функция распределения вероятности выражается формулой

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{1\times k}{2}} \times \int_0^\infty x^{\frac{K}{2}-1} \times e^{-x} dx} x^{\frac{k}{2}-1} \times e & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \le 0 \end{cases},$$

то при статистической обработке результатов говорят, что величина **x** имеет распределение **Хи**-квадрат ($\boldsymbol{\chi^2}$ – распределение) с числом степеней свободы $\boldsymbol{k}$, например кривые распределения (рис. 11) для случаев, когда число степеней свободы равны 2, 10 и 20. Нормальные случайные переменные являются важным выборочным распределением. Если $\mathbf{z_1, z_2, z_3, ... z_k}$, – независимые случайные переменные, распределённые по нормальному закону с *нулевым средним и единичной дисперсией*, что обозначается аббревиатурой $\mathbf{NID(0, 1)}$, то случайная переменная $\boldsymbol{\chi_k^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \cdots z_k^2 +}$ ..., подчиняется $\chi^2$-*распределению с* $\boldsymbol{k}$ *степенями свободы.* Плотность вероятностей распределения имеет вид

$$f(\chi^2) = \frac{1}{2^{k/2} \times 2^{k/2}} (\chi^2)^{\frac{k}{2}-1} \times e^{-\chi^2/2}, \quad \chi^2 > 0,$$

где $\mathbf{k}$ – степень свободы; $\boldsymbol{\chi^2}$ – *хи-квадрат* распределение. Для примера, несколько кривых $\boldsymbol{\chi^2}$ – хи-квадрат распределения представлены на рис. 12. ($\boldsymbol{\chi^2}$ – распределение ассиметрично со средним $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{k}$ и дисперсией $\boldsymbol{\sigma^2} = \mathbf{2k}$).

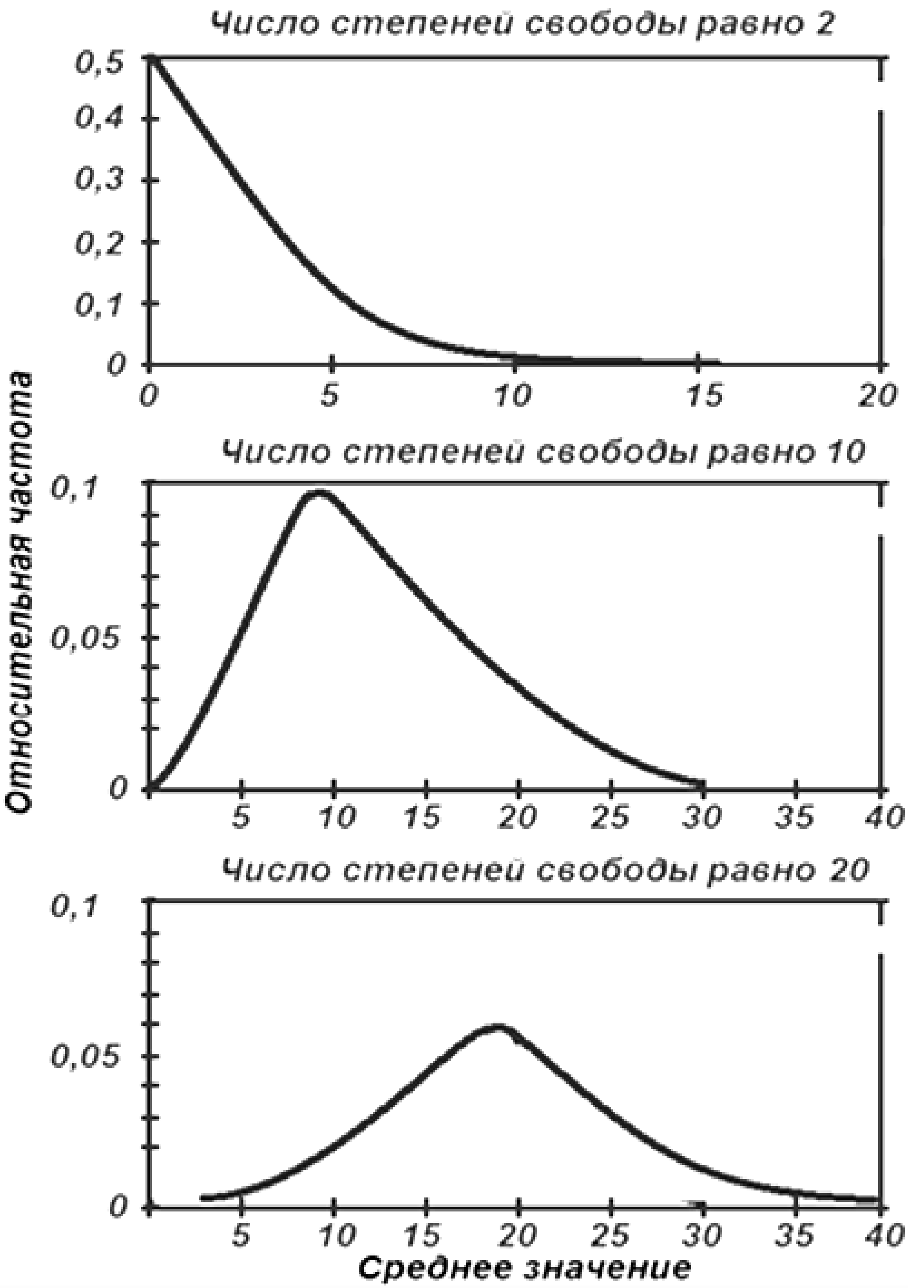


Рис. 11. Кривые $\chi^2$ – распределения с числом степеней свободы ***k,*** 2 10 и 20

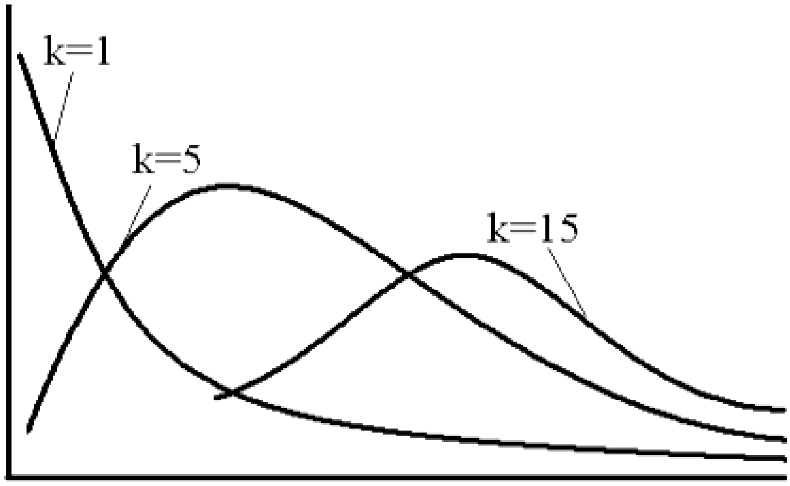


Рис. 12. Кривые $\chi^2$ – распределения

***Степень свободы.*** Характеристика формы графика $\chi^2$ – распределения. Поэтому, если изменить число степеней свободы форма графика тоже изменится. Степень свободы зависит от размера выборки. Чем больше выборка, тем больше степень свободы.


Рис. 13. Значения вероятности $\chi^2$ – распределения

Так же как существует таблица стандартного нормального (см. табл.8) распределения, есть таблица $\chi^2$ – распределения. Это таблица, в которой указываются значения $\chi^2$ (см. ось **x** на графике, рис. 11 и 12, табл. 9) т. е. соответствует значению вероятности заштрихованной области **P** (площадь и доля – рис. 13).

Таблица 9

$\chi^2$ – распределение

| *степень свободы* / P | 0,995 | 0,99 | 0,975 | 0,95 | 0,05 | 0,025 | 0,01 | 0,005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,000039 | 0,0002 | 0,0010 | 0,0039 | ***3,8415*** | 5,0239 | 6,6349 | 7,8794 |
| 2 | 0,0100 | 0,0201 | 0,0506 | 0,1026 | 5,015 | 7,3778 | 0,2104 | 10,5065 |
| 3 | 0,0717 | 0,1148 | 0,2158 | 0,3518 | 7,8147 | 9,3484 | 11,3449 | 12,8381 |
| 4 | 0,2070 | 0,2971 | 0,4844 | 0,7107 | 9,4877 | 11,1433 | 13,2767 | 14,8602 |
| 5 | 0,4118 | 0,5543 | 0,8312 | 1,1455 | 11,0705 | 12,8325 | 15,0863 | 16,7496 |
| 6 | 0,6757 | 0,8721 | 1,2373 | 1,6354 | 12,5916 | 14,4494 | 16,8119 | 18,5475 |
| 7 | 0,9893 | 1,2390 | 1,6899 | 2,1673 | 14,0671 | 16,0128 | 18,4753 | 20,2777 |
| 8 | 1,3444 | 1,6465 | 2,1797 | 2,7326 | 15,5073 | 17,5345 | 20,0902 | 21,9549 |
| 9 | 1,7349 | 2,0879 | 2,7004 | 3,3251 | 16,9190 | 19,0228 | 21,6660 | 23,5893 |
| 10 | 2,1558 | 2,5582 | 3,2470 | 3,9403 | 18,3070 | 20,4832 | 23,2093 | 25,1881 |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

Таблица стандартного нормального распределения позволяет по значению координаты $\chi^2$ (в пределах заштрихованной области рис. 14) найти соответствующую вероятность. По вертикали (рис. 14) определяется соответствующая координата на оси $\chi^2$.

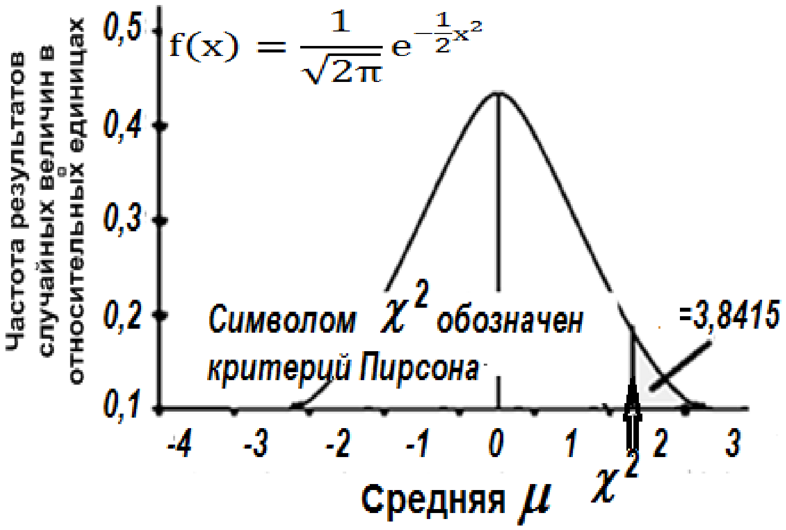


Рис. 13. Значение $\chi^2$ – распределения с оценкой вероятности

Если число степеней свободы равно «1», а величина *P=0,05,* то значение, находящееся на пересечении «1» и «0,05» будет равно «3,8415» (табл. 9).

## 1.10. Распределение Стьюдента. Распределение Фишера или F-распределение

***Распределение Стьюдента.*** При обработке результатов в статистических наблюдениях так же используется и такая формула распределения вероятностей как

$$f(x) = \frac{\int_0^\infty x^{\frac{k+1}{2}-1} e^{-x} dx}{\sqrt{n\pi} \int_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1} e^{-x} dx} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},$$

где **k** – число степеней свободы. Если плотность вероятностей выражена этой формулой, то в статистике это означает, что величина **x** имеет *распределение Стьюдента* с числом степеней свободы **k** (рис. 15).

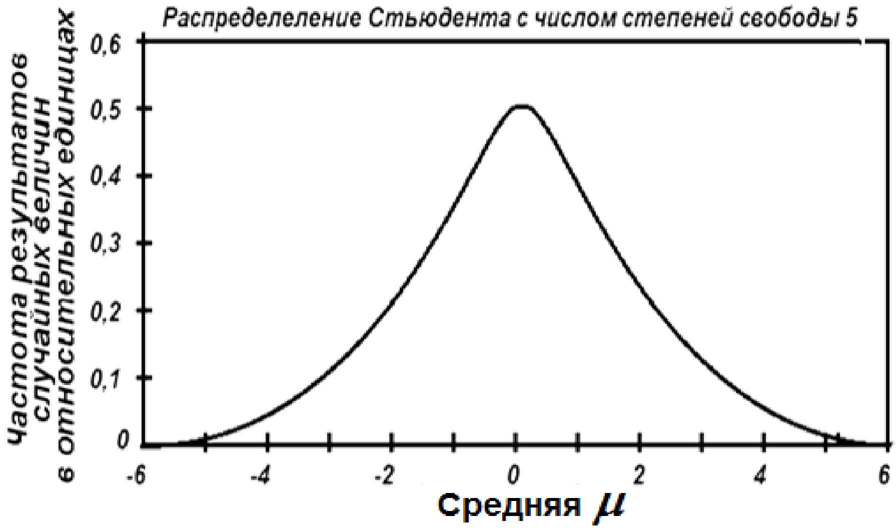


Рис. 15. Распределение Стьюдента

***Распределение Фишера***. При экспертных оценках хозяйственной деятельности предприятий не менее часто используется и такая формула статистического критерия как распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\int_0^\infty x^{\frac{k+m}{2}-1} e^{-x} dx\right) \times k^{\frac{k}{2}} \times m^{\frac{m}{2}}}{\left(\int_0^\infty x^{\frac{k}{2}-1} e^{-x} dx\right) \times \left(\int_0^\infty x^{\frac{m}{2}-1} e^{-x} dx\right)} \times \dfrac{x^{\frac{k}{2}-1}}{(kx+m)^{\frac{k+m}{2}}} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \le 0 \end{cases},$$

где $k$ и $m$ – число степеней свободы величины $\chi$. Если плотность вероятностей выражена этой формулой, то в статистике это означает, что величина $\chi$ имеет распределение Стьюдента с числом степеней свободы $k$ и $m$ (рис. 16).

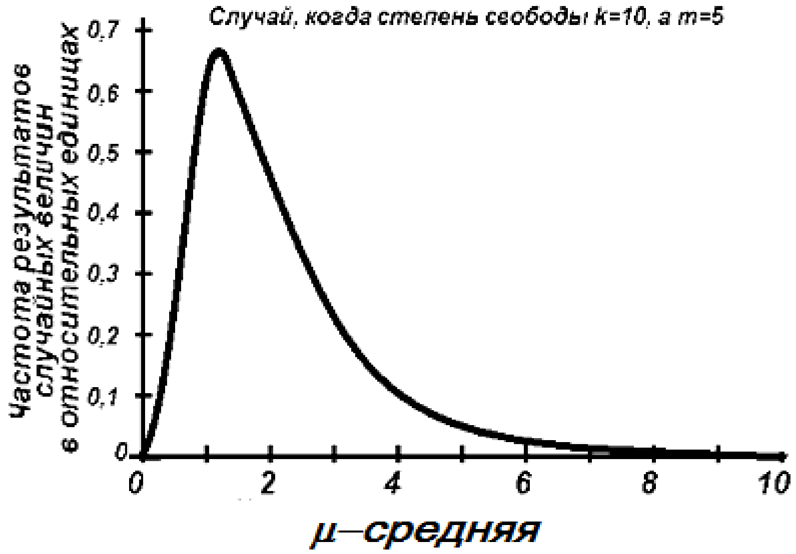


Рис. 16. Распределение Фишера

*Пример случайной* величины **c** – $\chi^2$ – *«хи-квадрат» распределением.* Пусть $\mathbf{y_1}$, $\mathbf{y_2}$, $\mathbf{y_3}$, ..$\mathbf{y_n}$ – случайная выборка из распределения $N(\mu, \sigma^2)$. Тогда

$$\frac{SS}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \cong \chi^2_{n-1},$$

т.е. величина (*отношение выборочной дисперсии к квадрату дисперсии отклонения)* подчиняется распределению $\chi^2$ – *«хи-квадрат»* с **n-1** степенями свободы**.**

Величина $SS = \sqrt{S^2} = \sqrt{(y_i - \bar{y})^2}$ в числителе выражения $\frac{SS}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \cong \chi^2_{n-1}$ *называется скорректированная сумма квадратов или сумма квадратов отклонений от среднего.* Анализ уравнения $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$ свидетельствует о том, что выборочную дисперсию возможно записать в виде $S^2 = \frac{1}{n-1}SS$.

Если наблюдения в выборке являются $NID(\mu, \sigma^2)$ (*распределённые по нормальному закону с нулевым средним и единичной дисперсией, что обозначается аббревиатурой* $NID(0,1)$, то величина $S^2$ распределена как $\left[\frac{\sigma^2}{n-1} - 1\right]\chi^2_{n-1}$. Таким образом, при условии, что исходная совокупность ***соответствует нормальному*** закону, распределение выборочной дисперсии $S^2 = \frac{1}{n-1}SS$ отличается от распределения «хи-квадрат – $\chi^2$» лишь постоянным множителем.

Если z и $\chi_k^2$ – независимые случайные переменные *со стандартизованным нормальным* $z = \frac{y-\mu}{\sigma}$ и $\chi^2$ – *«хи-квадрат распределением»* соответственно, то случайная величина $t_k = \frac{z}{\sqrt{\chi_k^2/k}}$ подчиняется $t_k$ –распределению (распределению Стьюдента) с k степенями свободы и обозначается $t_k$. Плотность вероятности $t_k$ имеет вид

$$f(t) = \frac{\Gamma[(k+1/2)]}{\sqrt{k\pi}\times\Gamma(k/2)} \times \frac{1}{[(t^2/k)+1]^{(k+1)/2}}, \quad -\infty < t < \infty,$$

причём среднее и дисперсия $t_k$ соответственно – $\mu = 0$ и $\sigma^2 = \frac{k}{k-2}$ при $k > 2$. На рис. 17 представлены варианты нескольких кривых $t_k$ – *распределения*, причём когда $k = \infty$, $t_k$ – распределение переходит в *стандартизированное нормальное распределение* – $\mathbf{z} = \frac{y-\mu}{\sigma}$. В табл. 10 приведены процентные (относительные) точки распределения Стьюдента. И если $y_1, y_1, y_1, \ldots y_n$ – случайная выборка из распределения $N(\mu, \sigma)$, то величина $t = \frac{(y-\mu)}{S/\sqrt{n}}$ подчиняется $t_k$-распределению с $(n-1)$– степенями свободы.

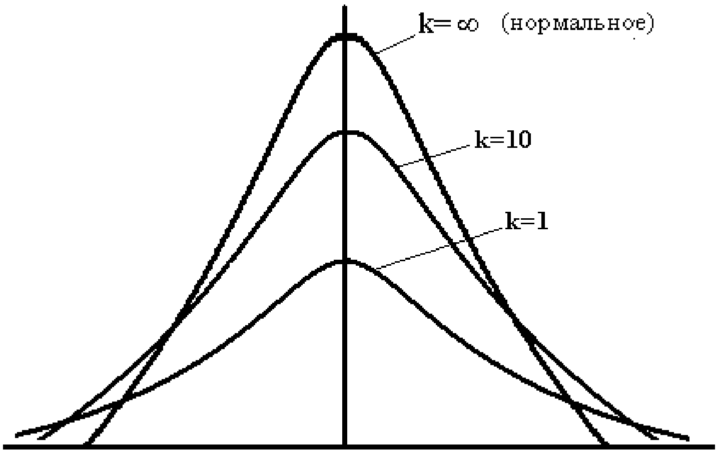

Рис. 16. Кривые $t_k$-распределения

Дисперсия t, которая определена как $t = \frac{(y-\mu)}{S/\sqrt{n}}$ носит название *F-распределение или распределение Фишера*. В табл. 11. приведены процентные (относительные) точки распределения Фишера. Если $\chi_u^2$ и $\chi_v^2$ – независимые случайные переменные распределения «хи-квадрат – $\chi^2$» с числом степеней свободы u и v соответственно, то отношение $F_{u,v} = \frac{\chi_u^2/u}{\chi_v^2/v}$ подчиняется F-распределению с u степенями свободы *числителя* и $\upsilon$ степенями свободы *знаменателя*. Формула плотности вероятности *F-распределения* имеет следующий вид

$$h(F)=\frac{\Gamma\left(\frac{u+v}{2}\right)\times\left(\frac{u}{v}\right)^{u/2}F^{(u/2)-1}}{\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\times\left[\frac{u}{v}F+1\right]^{(u+v)/2}},\quad 0<F<\infty.$$

Таблица 10

Значения t-критерия Стьюдента (односторонняя постановка задачи)

| ν | ***0,45*** | ***0,40*** | ***0,35*** | ***0,30*** | ***0,25*** | ***0,125*** | ***0,05*** | ***0,025*** | ***0,0125*** | ***0,0051*** | ***0,0025*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0,158 | 0,325 | 0,510 | 0,727 | 1,000 | 2,414 | 6,314 | 12,710 | 25,45 | 63 66 | 127,3 |
| **2** | 0,142 | 0,289 | 0,445 | 0,617 | 0,817 | 1,604 | 2,920 | 4,303 | 6,205 | 9,925 | 14,09 |
| **3** | 0,137 | 0,277 | 0,424 | 0,584 | 0,765 | 1,423 | 2,353 | 3,183 | 4,1775 | 5,841 | 7,453 |
| **4** | 0,134 | 0,271 | 0,414 | 0,569 | 0,741 | 1,344 | 2,132 | 2,776 | 3,495 | 4,604 | 5,598 |
| **5** | 0,132 | 0,267 | 0,408 | 0,559 | 0,727 | 1,301 | 2,015 | 2,571 | 3,163 | 4,032 | 4,773 |
| **6** | 0,131 | 0,265 | 0,404 | 0,553 | 0,718 | 1,273 | 1,943 | 2,447 | 2,969 | 3,707 | 4,317 |
| **7** | 0,130 | 0,263 | 0,402 | 0,549 | 0,711 | 1,254 | 1,895 | 2,365 | 2,841 | 3,500 | 4,029 |
| **8** | 0,130 | 0,262 | 0,399 | 0,546 | 0,706 | 1,240 | 1,860 | 2,306 | 2,752 | 3,355 | 3,833 |
| **9** | 0,129 | 0,261 | 0,398 | 0,543 | 0,703 | 1,230 | *1,833* | 2,262 | 2,685 | 3,250 | 3,690 |
| **10** | 0,129 | 0,260 | 0,397 | 0,542 | 0,700 | 1,221 | *1,813* | 2,228 | 2,634 | 3,169 | 3,581 |
| **11** | 0,129 | 0,260 | 0,396 | 0,540 | 0,697 | 1,215 | 1,796 | 2,201 | 2,593 | 3,106 | 3,500 |
| **12** | 0,128 | 0,259 | 0,395 | 0,539 | 0,695 | 1,209 | 1,782 | 2,179 | 2,560 | 3,055 | 3,428 |
| **13** | 0,128 | 0,259 | 0,394 | 0,538 | 0,694 | 1,204 | 1,771 | 2,160 | 2,533 | 3,012 | 3,373 |
| **14** | 0,128 | 0,258 | 0,393 | 0,537 | 0,692 | 1,200 | 1,761 | 2,145 | 2,510 | 2,977 | 3,326 |
| **15** | 0,128 | 0,258 | 0,392 | 0,536 | 0,691 | 1,197 | 1,753 | *2,132* | 2,490 | 2,947 | 3,286 |
| **20** | 0,127 | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,687 | 1,185 | 1,725 | *2,086* | 2,423 | 2,845 | 3,153 |
| **25** | 0,127 | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 1,178 | 1,708 | 2,060 | 2,385 | 2,787 | 3,078 |
| **30** | 0,127 | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 1,173 | 1,697 | 2,042 | 2,360 | 2,750 | 3,030 |
| **40** | 0,126 | 0,255 | 0,388 | 0,529 | 0,681 | 1,167 | 1,684 | 2,021 | 2,329 | 2,705 | 2,971 |
| **60** | 0,126 | 0,254 | 0,387 | 0,527 | 0,679 | 1,162 | 1,671 | 2,000 | 2,3299 | 2,660 | 2,915 |
| **…** | | | | | | | | | | | |
| **120** | 0,126 | 0,254 | 0,386 | 0,526 | 0,677 | 1,156 | 1,658 | 1,980 | 2,270 | 2,617 | 2,860 |
| ∞ | 0,126 | 0,253 | 0,385 | 0,524 | 0,674 | 1,150 | 1,645 | 1,960 | 2,241 | 2,576 | 2,807 |

ν* – степени свободы

*Вот как выглядят статистические данные, соответствующие F-распределению.* Есть две нормальные совокупности с одинаковой дисперсией $\boldsymbol{\sigma^2}$. Если $\mathbf{y_{1-1}}, \mathbf{y_{1-2}}, \mathbf{y_{1-3}}, \dots\dots \mathbf{y_{1-n}}$ – случайная выборка объёма $\mathbf{n_1}$ – наблюдений из первой совокупности, а $\mathbf{y_{2-1}}, \mathbf{y_{2-2}}, \mathbf{y_{2-3}}, \dots\dots \mathbf{y_{2-n}}$, – случайная выборка объёма $\mathbf{n_2}$ наблюдений из второй совокупности, то

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cong F_{n-1,n-2},$$

где $S_1^2$ и $S_2^2$ – выборочные дисперсии. Этот результат получается непосредственно из соотношений $\frac{SS}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2\cong\chi_{n-1}^2$ – *случайной величины с* $\boldsymbol{\chi^2}$ – *«хи-квадрат» распределением* и $F_{u,v}=\frac{\chi_u^2/u}{\chi_v^2/v}$ подчинением F-распределению**.**

Таблица 11

Значения критерия $F_{\nu_1;\nu_2}$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$

| $\nu_2 \backslash \nu_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4052 | 4999,5 | 5403 | 5625 | 5764 | 5859 | 5928 | 5982 | 6022 | 6056 | 6106 | 6157 | 6209 | 6235 | 6261 | 6287 | 6313 | 6339 | 6366 |
| 2 | 98,50 | 99,00 | 99,17 | 99,25 | 99,30 | 99,33 | 99,36 | 99,37 | 99,39 | 99,40 | 99,42 | 99,43 | 99,45 | 99,46 | 99,47 | 99,47 | 99,48 | 99,49 | 99,50 |
| 3 | 34,12 | 30,82 | 29,46 | 28,71 | 28,24 | 27,91 | 27,67 | 27,49 | 27,35 | 27,23 | 27,05 | 26,87 | 26,69 | 26,00 | 26,50 | 26,41 | 26,32 | 26,22 | 26,13 |
| 4 | 21,20 | 18,00 | 16,69 | 15,98 | 15,52 | 15,21 | 14,98 | 14,80 | 14,66 | 14,55 | 14,37 | 14,20 | 14,02 | 13,93 | 13,84 | 13,75 | 13,65 | 13,56 | 13,46 |
| 5 | 16,26 | 13,27 | 12,06 | 11,39 | 10,97 | 10,67 | 10,46 | 10,29 | 10,16 | 10,05 | 9,89 | 9,72 | 9,55 | 9,47 | 9,38 | 9,29 | 9,20 | 9,11 | 9,02 |
| 6 | 13,75 | 10,92 | 9,78 | 9,15 | 8,75 | 8,47 | 8,26 | 8,10 | 7,98 | 7,87 | 7,72 | 7,56 | 7,40 | 7,31 | 7,23 | 7,14 | 7,06 | 6,97 | 6,88 |
| 7 | 12,25 | 9,55 | 8,45 | 7,85 | 7,46 | 7,19 | 6,99 | 6,84 | 6,72 | 6,62 | 6,47 | 6,31 | 6,16 | 6,07 | 5,99 | 5,91 | 5,82 | 5,74 | 5,65 |
| 8 | 11,26 | 8,65 | 7,59 | 7,01 | 6,63 | 6,37 | 6,18 | 6,03 | 5,91 | 5,81 | 5,67 | 5,52 | 5,36 | 5,28 | 5,20 | 5,12 | 5,03 | 4,95 | 4,86 |
| 9 | 10,56 | 8,02 | 6,99 | 6,42 | 6,06 | 5,80 | 5,61 | 5,47 | 5,35 | 5,26 | 5,11 | 4,96 | 4,81 | 4,73 | 4,65 | 4,57 | 4,48 | 4,40 | 4,31 |
| 10 | 10,04 | 7,56 | 6,55 | 5,99 | 5,64 | 5,39 | 5,20 | 5,06 | 4,94 | 4,85 | 4,71 | 4,56 | 4,41 | 4,33 | 4,25 | 4,17 | 4,08 | 4,00 | 3,91 |
| 11 | 9,65 | 7,21 | 6,22 | 5,67 | 5,32 | 5,07 | 4,89 | 4,74 | 4,63 | 4,54 | 4,40 | 4,25 | 4,10 | 4,02 | 3,94 | 3,86 | 3,78 | 3,69 | 3,60 |
| 12 | 9,33 | 6,93 | 5,95 | 5,41 | 5,06 | 4,82 | 4,64 | 4,50 | 4,39 | 4,30 | 4,16 | 4,01 | 3,86 | 3,78 | 3,70 | 3,62 | 3,54 | 3,45 | 3,36 |
| 14 | 8,86 | 6,51 | 5,56 | 5,04 | 4,69 | 4,46 | 4,28 | 4,14 | 4,03 | 3,94 | 3,80 | 3,66 | 3,51 | 3,43 | 3,35 | 3,27 | 3,18 | 3,09 | 3,00 |
| 15 | 8,68 | 6,36 | 5,42 | 4,89 | 4,56 | 4,32 | 4,14 | 4,00 | 3,89 | 3,80 | 3,67 | 3,52 | 3,37 | 3,29 | 3,21 | 3,13 | 3,05 | 2,96 | 2,87 |
| 16 | 8,53 | 6,23 | 5,29 | 4,77 | 4,44 | 4,20 | 4,03 | 3,89 | 3,78 | 3,69 | 3,55 | 3,41 | 3,26 | 3,18 | 3,10 | 3,02 | 2,93 | 2,84 | 2,75 |
| 17 | 8,40 | 6,11 | 5,18 | 4,67 | 4,34 | 4,10 | 3,93 | 3,79 | 3,68 | 3,59 | 3,46 | 3,31 | 3,16 | 3,08 | 3,00 | 2,92 | 2,83 | 2,75 | 2,65 |
| 18 | 8,29 | 6,01 | 5,09 | 4,58 | 4,25 | 4,01 | 3,84 | 3,71 | 3,60 | 3,51 | 3,37 | 3,23 | 3,08 | 3,00 | 2,92 | 2,84 | 2,75 | 2,66 | 2,57 |
| 19 | 8,18 | 5,93 | 5,01 | 4,50 | 4,17 | 3,94 | 3,77 | 3,63 | 3,52 | 3,43 | 3,30 | 3,15 | 3,00 | 2,92 | 2,84 | 2,76 | 2,67 | 2,58 | 2,49 |
| 20 | 8,10 | 5,85 | 4,94 | 4,43 | 4,10 | 3,87 | 3,70 | 3,56 | 3,46 | 3,37 | 3,23 | 3,09 | 2,94 | 2,86 | 2,78 | 2,69 | 2,61 | 2,52 | 2,42 |
| 21 | 8,02 | 5,78 | 4,87 | 4,37 | 4,04 | 3,81 | 3,64 | 3,51 | 3,40 | 3,31 | 3,17 | 3,03 | 2,88 | 2,80 | 2,72 | 2,64 | 2,55 | 2,46 | 2,36 |
| 22 | 7,95 | 5,72 | 4,82 | 4,31 | 3,99 | 3,76 | 3,59 | 3,45 | 3,35 | 3,26 | 3,12 | 2,98 | 2,83 | 2,75 | 2,67 | 2,58 | 2,50 | 2,40 | 2,31 |
| 23 | 7,88 | 5,66 | 4,76 | 4,26 | 3,94 | 3,71 | 3,54 | 3,41 | 3,30 | 3,21 | 3,07 | 2,93 | 2,78 | 2,70 | 2,62 | 2,54 | 2,45 | 2,35 | 2,26 |
| 24 | 7,82 | 5,61 | 4,72 | 4,22 | 3,90 | 3,67 | 3,50 | 3,36 | 3,26 | 3,17 | 3,03 | 2,89 | 2,74 | 2,66 | 2,58 | 2,49 | 2,40 | 2,31 | 2,21 |
| 25 | 7,77 | 5,57 | 4,68 | 4,18 | 3,85 | 3,63 | 3,46 | 3,32 | 3,22 | 3,13 | 2,99 | 2,85 | 2,70 | 2,62 | 2,54 | 2,45 | 2,36 | 2,27 | 2,17 |
| 26 | 7,72 | 5,53 | 4,64 | 4,14 | 3,82 | 3,59 | 3,42 | 3,29 | 3,18 | 3,09 | 2,96 | 2,81 | 2,66 | 2,58 | 2,50 | 2,42 | 2,33 | 2,23 | 2,13 |
| 27 | 7,68 | 5,49 | 4,60 | 4,11 | 3,78 | 3,56 | 3,39 | 3,26 | 3,15 | 3,06 | 2,93 | 2,78 | 2,63 | 2,55 | 2,47 | 2,38 | 2,29 | 2,20 | 2,10 |
| 28 | 7,64 | 5,45 | 4,57 | 4,07 | 3,75 | 3,53 | 3,36 | 3,23 | 3,12 | 3,03 | 2,90 | 2,75 | 2,60 | 2,52 | 2,44 | 2,35 | 2,26 | 2,17 | 2,06 |
| 29 | 7,60 | 5,42 | 4,54 | 4,04 | 3,73 | 3,50 | 3,33 | 3,20 | 3,09 | 3,00 | 2,87 | 2,73 | 2,57 | 2,49 | 2,41 | 2,33 | 2,23 | 2,14 | 2,03 |
| 30 | 7,56 | 5,39 | 4,51 | 4,02 | 3,70 | 3,47 | 3,30 | 3,17 | 3,07 | 2,98 | 2,84 | 2,70 | 2,55 | 2,47 | 2,39 | 2,30 | 2,21 | 2,11 | 2,01 |
| 40 | 7,31 | 5,18 | 4,31 | 3,83 | 3,51 | 3,29 | 3,12 | 2,99 | 2,89 | 2,80 | 2,66 | 2,52 | 2,37 | 2,29 | 2,20 | 2,11 | 2,02 | 1,92 | 1,80 |
| 60 | 7,08 | 4,98 | 4,13 | 3,65 | 3,34 | 3,12 | 2,95 | 2,82 | 2,72 | 2,63 | 2,50 | 2,35 | 2,20 | 2,12 | 2,03 | 1,94 | 1,84 | 1,73 | 1,60 |
| 120 | 6,85 | 4,79 | 3,95 | 3,48 | 3,17 | 2,96 | 2,79 | 2,66 | 2,56 | 2,47 | 2,34 | 2,19 | 2,03 | 1,95 | 1,86 | 1,76 | 1,66 | 1,53 | 1,38 |
| ∞ | 6,63 | 4,61 | 3,78 | 3,32 | 3,02 | 2,80 | 2,64 | 2,51 | 2,41 | 2,32 | 2,18 | 2,04 | 1,88 | 1,79 | 1,70 | 1,59 | 1,47 | 1,32 | 1,00 |

Продолжение табл. 11

Значения критерия $F_{\nu_1;\nu_2}$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}025$

| $\nu_2 \backslash \nu_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 647,8 | 799,5 | 864,2 | 899,6 | 921,8 | 937,1 | 948,2 | 956,7 | 963,3 | 968,6 | 976,7 | 984,9 | 993,1 | 997,2 | 1001 | 1006 | 1010 | 1014 | 1018 |
| 2 | 38,51 | 39,00 | 39,17 | 39,25 | 39,30 | 39,33 | 39,36 | 39,37 | 39,39 | 39,40 | 39,41 | 39,43 | 39,45 | 39,46 | 39,46 | 39,47 | 39,48 | 39,49 | 39,50 |
| 3 | 17,44 | 16,04 | 15,44 | 15,10 | 14,88 | 14,73 | 14,62 | 14,54 | 14,47 | 14,42 | 14,34 | 14,25 | 14,17 | 14,12 | 14,08 | 14,04 | 13,99 | 13,95 | 13,90 |
| 4 | 12,22 | 10,65 | 9,88 | 9,60 | 9,36 | 9,20 | 9,07 | 8,98 | 8,90 | 8,84 | 8,75 | 8,66 | 8,56 | 8,51 | 8,46 | 8,41 | 8,36 | 8,31 | 8,26 |
| 5 | 10,01 | 8,43 | 7,76 | 7,39 | 7,15 | 6,98 | 6,85 | 6,76 | 6,68 | 6,62 | 6,52 | 6,43 | 6,33 | 6,28 | 6,23 | 6,18 | 6,12 | 6,07 | 6,02 |
| 6 | 8,81 | 7,26 | 6,60 | 6,23 | 5,99 | 5,82 | 5,70 | 5,60 | 5,52 | 5,46 | 5,37 | 5,27 | 5,17 | 5,12 | 5,07 | 5,01 | 4,96 | 4,9 | 4,85 |
| 7 | 8,07 | 6,54 | 5,89 | 5,52 | 5,29 | 5,12 | 4,99 | 4,90 | 4,82 | 4,76 | 4,67 | 4,57 | 4,47 | 4,42 | 4,36 | 4,31 | 4,25 | 4,2 | 4,14 |
| 8 | 7,57 | 6,06 | 5,42 | 5,05 | 4,82 | 4,65 | 4,53 | 4,43 | 4,36 | 4,30 | 4,20 | 4,10 | 4,00 | 3,95 | 3,89 | 3,84 | 3,78 | 3,73 | 3,67 |
| 9 | 7,21 | 5,71 | 5,08 | 4,72 | 4,48 | 4,32 | 4,20 | 4,10 | 4,03 | 3,96 | 3,87 | 3,77 | 3,67 | 3,61 | 3,56 | 3,51 | 3,45 | 3,39 | 3,33 |
| 10 | 6,94 | 5,46 | 4,83 | 4,47 | 4,24 | 4,07 | 3,95 | 3,85 | 3,78 | 3,72 | 3,62 | 3,52 | 3,42 | 3,37 | 3,31 | 3,26 | 3,20 | 3,14 | 3,08 |
| 11 | 6,72 | 5,26 | 4,63 | 4,28 | 4,04 | 3,88 | 3,76 | 3,66 | 3,59 | 3,53 | 3,43 | 3,33 | 3,23 | 3,17 | 3,12 | 3,06 | 3,00 | 2,94 | 2,88 |
| 12 | 6,55 | 5,10 | 4,47 | 4,12 | 3,89 | 3,73 | 3,61 | 3,51 | 3,44 | 3,37 | 3,28 | 3,18 | 3,07 | 3,02 | 2,96 | 2,91 | 2,85 | 2,79 | 2,72 |
| 13 | 6,41 | 4,97 | 4,35 | 4,00 | 3,77 | 3,60 | 3,48 | 3,39 | 3,31 | 3,25 | 3,15 | 3,05 | 2,95 | 2,89 | 2,84 | 2,78 | 2,72 | 2,66 | 2,60 |
| 14 | 6,30 | 4,86 | 4,24 | 3,89 | 3,66 | 3,50 | 3,38 | 3,29 | 3,21 | 3,15 | 3,05 | 2,95 | 2,84 | 2,79 | 2,73 | 2,67 | 2,61 | 2,55 | 2,49 |
| 15 | 6,20 | 4,77 | 4,15 | 3,80 | 3,58 | 3,41 | 3,29 | 3,20 | 3,12 | 3,06 | 2,96 | 2,86 | 2,76 | 2,7 | 2,64 | 2,59 | 2,52 | 2,46 | 2,40 |
| 16 | 6,12 | 4,69 | 4,08 | 3,73 | 3,50 | 3,34 | 3,22 | 3,12 | 3,05 | 2,99 | 2,89 | 2,79 | 2,68 | 2,63 | 2,57 | 2,51 | 2,45 | 2,38 | 2,32 |
| 17 | 6,04 | 4,62 | 4,01 | 3,66 | 3,44 | 3,28 | 3,16 | 3,06 | 2,98 | 2,92 | 2,82 | 2,72 | 2,62 | 2,56 | 2,50 | 2,44 | 2,38 | 2,32 | 2,25 |
| 18 | 5,98 | 4,56 | 3,95 | 3,61 | 3,38 | 3,22 | 3,10 | 2,01 | 2,93 | 2,87 | 2,77 | 2,67 | 2,56 | 2,5 | 2,44 | 2,38 | 2,32 | 2,26 | 2,19 |
| 19 | 5,92 | 4,51 | 3,90 | 3,56 | 3,33 | 3,17 | 3,05 | 2,96 | 2,88 | 2,82 | 2,72 | 2,62 | 2,51 | 2,45 | 2,39 | 2,33 | 2,27 | 2,2 | 2,13 |
| 20 | 5,87 | 4,46 | 3,86 | 3,51 | 3,29 | 3,13 | 3,01 | 2,91 | 2,84 | 2,77 | 2,68 | 2,57 | 2,46 | 2,41 | 2,35 | 2,29 | 2,22 | 2,16 | 2,09 |
| 21 | 5,83 | 4,42 | 3,82 | 3,48 | 3,25 | 3,09 | 2,97 | 2,87 | 2,80 | 2,73 | 2,64 | 2,53 | 2,42 | 2,37 | 2,31 | 2,25 | 2,18 | 2,11 | 2,04 |
| 22 | 5,79 | 4,38 | 3,78 | 3,44 | 3,22 | 3,05 | 2,93 | 2,84 | 2,76 | 2,70 | 2,60 | 2,50 | 2,39 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,14 | 2,08 | 2,00 |
| 23 | 5,75 | 4,35 | 3,75 | 3,41 | 3,18 | 3,02 | 2,90 | 2,81 | 2,73 | 2,67 | 2,57 | 2,47 | 2,36 | 2,3 | 2,24 | 2,18 | 2,11 | 2,04 | 1,97 |
| 24 | 5,72 | 4,32 | 3,72 | 3,38 | 3,15 | 2,99 | 2,87 | 2,78 | 2,70 | 2,64 | 2,54 | 2,44 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,15 | 2,08 | 2,01 | 1,94 |
| 25 | 5,69 | 4,29 | 3,69 | 3,35 | 3,13 | 2,97 | 2,85 | 2,75 | 2,68 | 2,61 | 2,51 | 2,41 | 2,30 | 2,24 | 2,18 | 2,12 | 2,05 | 1,98 | 1,91 |
| 26 | 5,66 | 4,27 | 3,67 | 3,33 | 3,10 | 2,94 | 2,82 | 2,73 | 2,65 | 2,59 | 2,49 | 2,39 | 2,28 | 2,22 | 2,16 | 2,09 | 2,03 | 1,95 | 1,88 |
| 27 | 5,63 | 4,24 | 3,65 | 3,31 | 3,08 | 2,92 | 2,80 | 2,71 | 2,63 | 2,57 | 2,47 | 2,36 | 2,25 | 2,19 | 2,13 | 2,07 | 2,00 | 1,93 | 1,85 |
| 28 | 5,61 | 4,22 | 3,63 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,78 | 2,69 | 2,61 | 2,55 | 2,45 | 2,34 | 2,23 | 2,17 | 2,11 | 2,05 | 1,98 | 1,91 | 1,83 |
| 29 | 5,59 | 4,20 | 3,61 | 3,27 | 3,04 | 2,88 | 2,76 | 2,67 | 2,59 | 2,53 | 2,43 | 2,32 | 2,21 | 2,15 | 2,09 | 2,03 | 1,96 | 1,89 | 1,81 |
| 30 | 5,57 | 4,18 | 3,59 | 3,25 | 3,03 | 2,87 | 2,75 | 2,65 | 2,57 | 2,51 | 2,41 | 2,31 | 2,20 | 2,14 | 2,07 | 2,01 | 1,94 | 1,87 | 1,79 |
| 40 | 5,42 | 4,05 | 3,46 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,62 | 2,53 | 2,45 | 2,39 | 2,29 | 2,18 | 2,07 | 2,01 | 1,94 | 1,88 | 1,80 | 1,72 | 1,64 |
| 60 | 5,29 | 3,93 | 3,34 | 3,01 | 2,79 | 2,63 | 2,51 | 2,41 | 2,33 | 2,27 | 2,17 | 2,06 | 1,94 | 1,88 | 1,82 | 1,74 | 1,67 | 1,58 | 1,48 |
| 120 | 5,15 | 3,80 | 3,23 | 2,89 | 2,67 | 2,52 | 2,39 | 2,30 | 2,22 | 2,16 | 2,05 | 1,94 | 1,82 | 1,76 | 1,69 | 1,61 | 1,53 | 1,43 | 1,31 |
| ∞ | 5,02 | 3,69 | 3,12 | 2,79 | 2,57 | 2,41 | 2,29 | 2,19 | 2,11 | 2,05 | 1,94 | 1,83 | 1,71 | 1,64 | 1,57 | 1,48 | 1,39 | 1,27 | 1,00 |

Продолжение табл. 11

Значения критерия $F_{\nu_1;\nu_2}$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$

| $\nu_2 \backslash \nu_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 161,4 | 199,5 | 215,7 | 224,6 | 230,2 | 234 | 236,8 | 238,9 | 240,5 | 241,9 | 243,9 | 245,9 | 248 | 249,1 | 250,1 | 2,51,1 | 252,2 | 253,3 | 254,3 |
| 2 | 18,51 | 19,00 | 19,16 | 19,35 | 19,30 | 19,33 | 19,35 | 19,37 | 19,38 | 19,40 | 19,41 | 19,43 | 19,45 | 19,45 | 19,46 | 19,47 | 19,48 | 19,49 | 19,50 |
| 3 | 10,13 | 9,55 | 9,28 | 9,12 | 9,01 | 8,94 | 8,89 | 8,85 | 8,81 | 8,79 | 8,74 | 8,70 | 8,66 | 8,64 | 8,62 | 8,59 | 8,57 | 8,55 | 8,53 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 6,39 | 6,26 | 6,16 | 6,09 | 6,04 | 6,00 | 5,96 | 5,91 | 5,86 | 5,80 | 5,77 | 5,75 | 5,72 | 5,69 | 5,66 | 5,63 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 5,19 | 5,05 | 4,95 | 4,88 | 4,82 | 4,77 | 4,74 | 4,68 | 4,62 | 4,56 | 4,53 | 4,50 | 4,46 | 4,43 | 4,40 | 4,36 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 4,53 | 4,39 | 4,28 | 4,21 | 4,15 | 4,10 | 4,06 | 4,00 | 3,94 | 3,87 | 3,84 | 3,81 | 3,77 | 3,74 | 3,70 | 3,67 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 4,12 | 3,97 | 3,87 | 3,79 | 3,73 | 3,68 | 3,64 | 3,57 | 3,51 | 3,44 | 3,41 | 3,28 | 3,34 | 3,30 | 3,27 | 3,23 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 3,84 | 3,69 | 3,58 | 3,50 | 3,44 | 3,39 | 3,35 | 3,28 | 3,22 | 3,15 | 3,12 | 3,08 | 3,04 | 3,01 | 2,97 | 2,93 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 3,63 | 3,48 | 3,37 | 3,29 | 3,23 | 3,18 | 3,14 | 3,07 | 3,01 | 2,94 | 2,90 | 2,86 | 2,83 | 2,79 | 2,75 | 2,71 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 3,48 | 3,33 | 3,22 | 3,14 | 3,07 | 3,02 | 2,98 | 2,91 | 2,85 | 2,77 | 2,74 | 2,70 | 2,66 | 2,62 | 2,58 | 2,54 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 3,36 | 3,20 | 3,09 | 3,01 | 2,95 | 2,90 | 2,85 | 2,79 | 2,72 | 2,65 | 2,61 | 2,57 | 2,53 | 2,49 | 2,45 | 2,40 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 3,26 | 3,11 | 3,00 | 2,91 | 2,85 | 2,80 | 2,75 | 2,69 | 2,62 | 2,54 | 2,51 | 2,47 | 2,43 | 2,38 | 2,34 | 2,30 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 3,18 | 3,03 | 2,92 | 2,83 | 2,77 | 2,71 | 2,67 | 2,60 | 2,53 | 2,46 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,30 | 2,25 | 2,21 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 3,11 | 2,96 | 2,85 | 2,76 | 2,70 | 2,65 | 2,60 | 2,53 | 2,46 | 2,39 | 2,35 | 2,31 | 2,27 | 2,22 | 2,18 | 2,13 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 3,06 | 2,90 | 2,79 | 2,71 | 2,64 | 2,59 | 2,54 | 2,48 | 2,40 | 2,33 | 2,29 | 2,25 | 2,20 | 2,16 | 2,11 | 2,07 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 3,01 | 2,85 | 2,74 | 2,66 | 2,59 | 2,54 | 2,49 | 2,42 | 2,35 | 2,28 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,01 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | 2,96 | 2,81 | 2,70 | 2,61 | 2,55 | 2,49 | 2,45 | 2,38 | 2,31 | 2,23 | 2,19 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,01 | 1,96 |
| 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 | 2,93 | 2,77 | 2,66 | 2,58 | 2,51 | 2,46 | 2,41 | 2,34 | 2,27 | 2,19 | 2,15 | 2,11 | 2,06 | 2,02 | 1,97 | 1,92 |
| 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 | 2,90 | 2,74 | 2,63 | 2,54 | 2,48 | 2,42 | 2,38 | 2,31 | 2,23 | 2,16 | 2,11 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,93 | 1,88 |
| 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 | 2,87 | 2,71 | 2,60 | 2,51 | 2,45 | 2,39 | 2,35 | 2,28 | 2,20 | 2,12 | 2,08 | 2,04 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,84 |
| 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 | 2,84 | 2,68 | 2,57 | 2,49 | 2,42 | 2,37 | 2,32 | 2,25 | 2,18 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,81 |
| 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 | 2,82 | 2,66 | 2,55 | 2,46 | 2,40 | 2,34 | 2,30 | 2,23 | 2,15 | 2,07 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,78 |
| 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 | 2,80 | 2,64 | 2,53 | 2,44 | 2,37 | 2,32 | 2,27 | 2,20 | 2,13 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,81 | 1,76 |
| 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 | 2,78 | 2,62 | 2,51 | 2,42 | 2,36 | 2,30 | 2,25 | 2,18 | 2,11 | 2,03 | 1,98 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,73 |
| 25 | 4,24 | 3,39 | 2,99 | 2,76 | 2,60 | 2,49 | 2,40 | 2,34 | 2,28 | 2,24 | 2,16 | 2,09 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,71 |
| 26 | 4,23 | 3,37 | 2,98 | 2,74 | 2,59 | 2,47 | 2,39 | 2,32 | 2,27 | 2,22 | 2,15 | 2,07 | 1,99 | 1,95 | 1,90 | 1,85 | 1,80 | 1,75 | 1,69 |
| 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 | 2,73 | 2,57 | 2,46 | 2,37 | 2,31 | 2,25 | 2,20 | 2,13 | 2,06 | 1,97 | 1,93 | 1,88 | 1,84 | 1,79 | 1,73 | 1,67 |
| 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 | 2,71 | 2,56 | 2,45 | 2,36 | 2,29 | 2,24 | 2,19 | 2,12 | 2,04 | 1,96 | 1,91 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,71 | 1,65 |
| 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 | 2,70 | 2,55 | 2,43 | 2,35 | 2,28 | 2,22 | 2,18 | 2,10 | 2,03 | 1,94 | 1,90 | 1,85 | 1,81 | 1,75 | 1,70 | 1,64 |
| 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 | 2,69 | 2,53 | 2,42 | 2,33 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,09 | 2,01 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,68 | 1,62 |
| 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 | 2,61 | 2,45 | 2,34 | 2,25 | 2,18 | 2,12 | 2,08 | 2,00 | 1,92 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,64 | 1,58 | 1,51 |
| 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 | 2,53 | 2,37 | 2,25 | 2,17 | 2,10 | 2,04 | 1,99 | 1,92 | 1,84 | 1,75 | 1,70 | 1,65 | 1,59 | 1,53 | 1,47 | 1,39 |
| 120 | 3,92 | 3,07 | 2,68 | 2,45 | 2,29 | 2,17 | 2,09 | 2,02 | 1,96 | 1,91 | 1,83 | 1,75 | 1,66 | 1,61 | 1,55 | 1,49 | 1,43 | 1,35 | 1,25 |
| ∞ | 3,84 | 3,00 | 2,60 | 2,37 | 2,21 | 2,10 | 2,01 | 1,94 | 1,88 | 1,83 | 1,75 | 1,67 | 1,57 | 1,52 | 1,46 | 1,39 | 1,32 | 1,22 | 1,00 |

Окончание табл. 11

Значения критерия $F_{\nu_1;\nu_2}$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$

| $\nu_2 \backslash \nu_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 15 | 20 | 24 | 30 | 40 | 60 | 120 | ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 39,86 | 49,5 | 53,59 | 55,83 | 57,24 | 58,2 | 58,91 | 59,44 | 59,86 | 60,19 | 60,71 | 61,22 | 61,74 | 62 | 62,26 | 62,53 | 62,79 | 63,06 | 63,33 |
| 2 | 8,53 | 9,00 | 9,16 | 9,24 | 9,29 | 9,33 | 9,35 | 9,37 | 9,38 | 9,39 | 9,41 | 9,42 | 9,44 | 9,45 | 9,46 | 9,47 | 9,47 | 9,48 | 9,49 |
| 3 | 5,54 | 5,46 | 5,39 | 5,34 | 5,31 | 5,28 | 5,27 | 5,25 | 5,24 | 5,23 | 5,22 | 5,20 | 5,18 | 5,18 | 5,17 | 5,16 | 5,15 | 5,14 | 5,13 |
| 4 | 4,54 | 4,32 | 4,19 | 4,11 | 4,05 | 4,01 | 3,98 | 3,95 | 3,94 | 3,92 | 3,90 | 3,87 | 3,84 | 3,83 | 3,82 | 3,80 | 3,79 | 3,78 | 3,76 |
| 5 | 4,06 | 3,78 | 3,62 | 3,52 | 3,45 | 3,40 | 3,37 | 3,34 | 3,32 | 3,30 | 3,27 | 3,24 | 3,21 | 3,19 | 3,17 | 3,16 | 3,14 | 3,12 | 3,10 |
| 6 | 3,78 | 3,46 | 3,29 | 3,18 | 3,11 | 3,05 | 3,01 | 2,98 | 2,96 | 2,94 | 2,90 | 2,87 | 2,84 | 2,82 | 2,80 | 2,78 | 2,76 | 2,74 | 2,72 |
| 7 | 3,59 | 3,26 | 3,07 | 2,96 | 2,88 | 2,83 | 2,78 | 2,75 | 2,72 | 2,70 | 2,67 | 2,63 | 2,59 | 2,58 | 2,56 | 2,54 | 2,51 | 2,49 | 2,47 |
| 8 | 3,46 | 3,11 | 2,92 | 2,81 | 2,73 | 2,67 | 2,62 | 2,59 | 2,56 | 2,54 | 2,50 | 2,46 | 2,42 | 2,40 | 2,38 | 2,36 | 2,34 | 2,32 | 2,29 |
| 9 | 3,36 | 3,01 | 2,81 | 2,69 | 2,61 | 2,55 | 2,51 | 2,47 | 2,44 | 2,42 | 2,38 | 2,34 | 2,30 | 2,28 | 2,25 | 2,23 | 2,21 | 2,18 | 2,16 |
| 10 | 3,29 | 2,92 | 2,73 | 2,61 | 2,52 | 2,46 | 2,41 | 2,38 | 2,35 | 2,32 | 2,28 | 2,24 | 2,20 | 2,18 | 2,16 | 2,13 | 2,11 | 2,08 | 2,06 |
| 11 | 3,23 | 2,86 | 2,66 | 2,54 | 2,45 | 2,39 | 2,34 | 2,30 | 2,27 | 2,25 | 2,21 | 2,17 | 2,12 | 2,10 | 2,08 | 2,05 | 2,03 | 2,00 | 1,97 |
| 12 | 3,18 | 2,81 | 2,61 | 2,48 | 2,39 | 2,33 | 2,28 | 2,24 | 2,21 | 2,19 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,04 | 2,01 | 1,99 | 1,96 | 1,93 | 1,90 |
| 13 | 3,14 | 2,76 | 2,56 | 2,43 | 2,35 | 2,28 | 2,23 | 2,20 | 2,16 | 2,14 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,98 | 1,96 | 1,93 | 1,90 | 1,88 | 1,85 |
| 14 | 3,10 | 2,73 | 2,52 | 2,39 | 2,31 | 2,24 | 2,19 | 2,15 | 2,12 | 2,10 | 2,05 | 2,01 | 1,96 | 1,94 | 1,91 | 1,89 | 1,86 | 1,83 | 1,80 |
| 15 | 3,07 | 2,70 | 2,49 | 2,36 | 2,27 | 2,21 | 2,16 | 2,12 | 2,09 | 2,06 | 2,02 | 1,97 | 1,92 | 1,90 | 1,87 | 1,85 | 1,82 | 1,79 | 1,76 |
| 16 | 3,05 | 2,67 | 2,46 | 2,33 | 2,24 | 2,18 | 2,13 | 2,09 | 2,06 | 2,03 | 1,99 | 1,94 | 1,89 | 1,87 | 1,84 | 1,81 | 1,78 | 1,75 | 1,72 |
| 17 | 3,03 | 2,64 | 2,44 | 2,31 | 2,22 | 2,15 | 2,10 | 2,06 | 2,03 | 2,00 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,84 | 1,81 | 1,78 | 1,75 | 1,72 | 1,69 |
| 18 | 3,01 | 2,62 | 2,42 | 2,29 | 2,20 | 2,13 | 2,08 | 2,04 | 2,00 | 1,98 | 1,93 | 1,89 | 1,84 | 1,81 | 1,78 | 1,75 | 1,72 | 1,69 | 1,66 |
| 19 | 2,99 | 2,61 | 2,40 | 2,27 | 2,18 | 2,11 | 2,06 | 2,02 | 1,98 | 1,96 | 1,91 | 1,86 | 1,81 | 1,79 | 1,76 | 1,73 | 1,70 | 1,67 | 1,63 |
| 20 | 2,97 | 2,59 | 2,38 | 2,25 | 2,16 | 2,09 | 2,04 | 2,00 | 1,96 | 1,94 | 1,89 | 1,84 | 1,79 | 1,77 | 1,74 | 1,71 | 1,68 | 1,64 | 1,61 |
| 21 | 2,96 | 2,57 | 2,36 | 2,23 | 2,14 | 2,08 | 2,02 | 1,98 | 1,95 | 1,92 | 1,87 | 1,83 | 1,78 | 1,75 | 1,72 | 1,69 | 1,66 | 1,62 | 1,59 |
| 22 | 2,95 | 2,56 | 2,35 | 2,22 | 2,13 | 2,06 | 2,01 | 1,97 | 1,93 | 1,90 | 1,86 | 1,81 | 1,76 | 1,73 | 1,70 | 1,67 | 1,64 | 1,60 | 1,57 |
| 23 | 2,94 | 2,55 | 2,34 | 2,21 | 2,11 | 2,05 | 1,99 | 1,95 | 1,92 | 1,89 | 1,84 | 1,80 | 1,74 | 1,72 | 1,69 | 1,66 | 1,62 | 1,59 | 1,55 |
| 24 | 2,93 | 2,54 | 2,33 | 2,19 | 2,10 | 2,04 | 1,98 | 1,94 | 1,91 | 1,88 | 1,83 | 1,78 | 1,73 | 1,70 | 1,67 | 1,64 | 1,61 | 1,57 | 1,53 |
| 25 | 2,92 | 2,53 | 2,32 | 2,18 | 2,09 | 2,02 | 1,97 | 1,93 | 1,89 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,72 | 1,69 | 1,66 | 1,63 | 1,59 | 1,56 | 1,52 |
| 26 | 2,91 | 2,52 | 2,31 | 2,17 | 2,08 | 2,01 | 1,96 | 1,92 | 1,88 | 1,86 | 1,81 | 1,76 | 1,71 | 1,68 | 1,65 | 1,61 | 1,58 | 1,54 | 1,50 |
| 27 | 2,90 | 2,51 | 2,30 | 2,17 | 2,07 | 2,00 | 1,95 | 1,91 | 1,87 | 1,85 | 1,80 | 1,75 | 1,70 | 1,67 | 1,64 | 1,60 | 1,57 | 1,53 | 1,49 |
| 28 | 2,89 | 2,50 | 2,29 | 2,16 | 2,06 | 2,00 | 1,94 | 1,90 | 1,87 | 1,84 | 1,79 | 1,74 | 1,69 | 1,66 | 1,63 | 1,59 | 1,56 | 1,52 | 1,48 |
| 29 | 2,89 | 2,50 | 2,28 | 2,15 | 2,06 | 1,99 | 1,93 | 1,89 | 1,86 | 1,83 | 1,78 | 1,73 | 1,68 | 1,65 | 1,62 | 1,58 | 1,55 | 1,51 | 1,47 |
| 30 | 2,88 | 2,49 | 2,28 | 2,14 | 2,03 | 1,98 | 1,93 | 1,88 | 1,85 | 1,82 | 1,77 | 1,72 | 1,67 | 1,64 | 1,61 | 1,57 | 1,54 | 1,50 | 1,46 |
| 40 | 2,84 | 2,44 | 2,23 | 2,09 | 2,00 | 1,93 | 1,87 | 1,83 | 1,79 | 1,76 | 1,71 | 1,66 | 1,61 | 1,57 | 1,54 | 1,51 | 1,47 | 1,42 | 1,38 |
| 60 | 2,79 | 2,39 | 2,18 | 2,04 | 1,95 | 1,87 | 1,82 | 1,77 | 1,74 | 1,71 | 1,66 | 1,60 | 1,54 | 1,51 | 1,48 | 1,44 | 1,40 | 1,35 | 1,29 |
| 120 | 2,75 | 2,35 | 2,13 | 1,99 | 1,90 | 1,82 | 1,77 | 1,72 | 1,68 | 1,65 | 1,60 | 1,55 | 1,48 | 1,45 | 1,41 | 1,37 | 1,32 | 1,26 | 1,19 |
| ∞ | 2,71 | 2,30 | 2,08 | 1,94 | 1,85 | 1,77 | 1,72 | 1,67 | 1,63 | 1,60 | 1,55 | 1,49 | 1,42 | 1,38 | 1,34 | 1,30 | 1,24 | 1,17 | 1,00 |

# 2. ОЦЕНИВАНИЕ

Какие бы ни были результаты экспертной оценки, они с точки зрения статистики, являются случайными переменными. Случайные переменные характеризуются, или описываются, своим *распределением вероятности*. Это распределение вероятности *задаётся одним или несколькими параметрами.* Например, $\mu$– *среднее* и $\sigma^2$ – *дисперсия* являются *параметрами нормального распределения.*

Уравнение

$$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(y-\mu/\sigma)]^2} \quad (-\infty < y < +\infty)\,.$$

Уравнение

$$\mathrm{f}(\chi^2) = \frac{1}{2^{k/2}\,1^{k/2}} (\chi^2)^{\frac{k}{2}-1}\, e^{\chi^2/2}$$

где $k$ – число степеней свободы, параметр $\chi^2$ – *«хи-квадрат» распределения;* $(\chi^2 > 0)$ – плотность вероятности этого распределения.

Поскольку распределение задаётся *параметрами*, то их необходимо *оценить. Оценкой* неизвестного параметра является *некоторая статистика экспертных результатов,* соответствующая этому *параметру.* Численное значение оценки, найденное по выборочным данным, также называется *оценкой.* В этом случае следует различать два понятия *«ОЦЕНКИ».*

1. *Оценка неизвестного параметра* – речь идёт о некотором правиле оценивания («оценочной функции»).

2. *Оценка по выборочным данным* – речь идёт о фиксированном значении, полученной для конкретной выборке.

Кроме того, различают *точечные и интервальные оценки.*

## 2.1. Точечная оценка (точечное оценивание)

*Точечное оценивание* представляет одно численное значение, оценивающий неизвестный параметр. Например, рассматривается случайная переменная **y** с плотностью вероятности **f(y)** с $\mu$ – *средней* и $\boldsymbol{\sigma^2}$ – *дисперсией* этого распределения, которые неизвестны.

Если $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \mathbf{y_3}, \dots\dots \mathbf{y_n}$, – случайная выборка объёма наблюдений случайной переменной **y,** то выборочное среднее $\bar{y}$ является точечной оценкой с $\mu$ – *среднего совокупности,* а $S^2$ – выборочная дисперсия точечной оценкой $\sigma^2$ – *дисперсии совокупности*. Если предположить, что требуется оценить среднее и дисперсию цены 1м$^2$ какого-то вида жилья при исследуемой выборке равной **n=25**, то выборочная *«среднее»* определяется по выражению $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i}$, а выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ по которым получены соответствующие результаты: $\mathbf{\bar{y} = 18,6}$ равна $\mathbf{S^2 = 1,20}$. В данном случае $\mathbf{\bar{y} = 18,6}$ *средняя величина* есть оценка $\boldsymbol{\sigma^2}$ – *дисперсии совокупности.*

Удовлетворяющие «требованиям» «точечные оценки» должны соответствовать следующим свойствам:

1. *Точечная оценка должна быть «несмещённой»,* а именно, *среднее* по достаточно большому интервалу или *математическое ожидание точечной оценки* должно совпадать со значением *оцениваемого параметра* (*оценка «неизвестного» и «оценка по выборочным данным»).*

2. *Точечная оценка должна обладать «минимальной дисперсией»* – свойство, которое характеризует эффективность оценки.

*Поскольку точечная оценка является статистикой,* то она является *случайной величиной.* Данное свойство означает, что дисперсия оценки с *«минимальной дисперсией», меньше, чем «дисперсия любой другой оценки»* того же параметра. В данном случае легко показать, что $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ и $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ – *несмещённые* оценки $\boldsymbol{\mu}$ и $\boldsymbol{\sigma^2}$ соответственно.

*В начале рассматривается средняя величина* $\mathbf{\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i}$, используя свойство оператора математического ожидания:

$$E(\bar{y}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n}\left(E\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu\right) = \mu, \quad (34)$$

поскольку математическое ожидание каждого наблюдения $\mathbf{y_i}$ есть $\boldsymbol{\mu}$. Таким образом, $\mathbf{\bar{y}}$ несмещённая оценка $\boldsymbol{\mu}$ – средней.

Для выборочной дисперсии получается следующее выражение

$$E(S^2) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1}\right] = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right] = \frac{1}{n-1}E(SS),$$

где (SS) – скорректированная сумма квадратов наблюдений $\mathbf{y_i}$.

Далее $E(SS) = E\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y}^2\right] =$
$= \sum_{i=1}^{n}(\mu^2 + \sigma^2) - n\left(\mu^2 + \frac{\sigma^2}{n}\right) - (n-1)\sigma^2$, то $E(S^2) = \frac{1}{n-1}E(SS) = \sigma^2$.

Величина (*n-1*) в предыдущем выражении называется *числом степеней свободы суммы квадратов* **SS.** Этот результат является общим, *а именно, если* $\mathbf{y_i}$ случайная переменная с дисперсией $\sigma^2$, а $\boldsymbol{\nu}$ – число степеней свободы суммы квадратов $SS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ , то величина $\sigma^2$, будет равна

$\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{SS}}{\nu}\right) = \sigma^2$. Число степеней свободы суммы квадратов равно числу её независимых элементов. Например, сумма $\mathrm{SS} = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ выражения $\mathbf{E(SS)} = \mathbf{E}[\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{y_i} - \bar{\mathbf{y}})^2] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathbf{y_i^2} - \mathbf{n}\bar{\mathbf{y}}^2\right] = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{\mu}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2) - \mathbf{n}\left(\boldsymbol{\mu}^2 + \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{\mathbf{n}}\right) -$ $-(\mathbf{n}-\mathbf{1})\boldsymbol{\sigma}^2$ представляет собой сумму квадратов $\mathbf{n}$ элементов: $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$. Эти элементы не являются независимыми, поскольку $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 0$, следовательно, независимыми только ($n$-*1*) из них, т. е. *число степеней свободы скорректированной суммы квадратов* SS составляет ($n$-*1*).

*Интервальная оценка представляет собой* случайный интервал, которому с определённой вероятностью принадлежит истинное значение оцениваемого параметра. Такие интервалы называются *«доверительными интервалами».*

*«Доверительный интервал»* – это интервал между двумя статистиками, содержащий с определённой вероятностью истинное значение оцениваемого параметра. Таким образом, для построения интервальной оценки параметра, например $\boldsymbol{\theta}$, необходимо найти две статистики $\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$ такие, при которых справедливо вероятностное утверждение

$$\mathrm{P}(\mathrm{L} \le \theta \le \mathrm{U}) = 1 - \alpha.$$

Интервал $\mathrm{P}(\mathrm{L} \le \theta \le \mathrm{U})$ называется *относительным (1–α) (или процентным 100(1–α)) доверительным интервалом для параметра θ.* Этому интервалу можно дать следующую интерпретацию:

1. если при повторении случайных выборок построить достаточно большое число таких интервалов, то **(1–α) или 100(1–α)** – *доверительный интервал* из них будет содержать *истинное значение параметра* $\boldsymbol{\theta}$;

2. статистики $L$ и $U$ называются соответственно **нижней L** и *верхней* **U** *доверительными границами***,** а величина ***(1–α)*** *– доверительным уровнем или доверительной вероятностью.* Если **(α=0,05)**, то интервал $P(L \le \theta \le U) = 1 - \alpha$ называется *95-процентным доверительным интервалом для* $\boldsymbol{\theta}$.

Например, пусть $\mathbf{y_i}$ есть нормальная случайная переменная *с неизвестным средним* $\boldsymbol{\mu}$, но известной *дисперсией* $\boldsymbol{\sigma}^2$. Если рассмотреть случайную выборку объёма ***n****-наблюдений* и вычислить $\bar{y}$, то $\frac{\bar{y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \cong \mathrm{N}(0,1)$.

В терминах теории вероятностей возможно записать

$$P\left(-Z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha^2,$$

где $Z_{\alpha/2}$– *верхняя процентная точка стандартизованного нормального распределения*, такая, при которой вероятность значений, превосходящих $\mathbf{Z_{\alpha/2}}$ равна $\boldsymbol{\alpha/2}$ и выражение $P\left(-Z_{\alpha/2} \le \frac{\bar{y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha^2$, можно переписать в виде

$$P\left(\bar{y} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{y} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha.$$

Сравнивая выражения

$$P\left(\bar{y} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{y} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \quad \text{и} \quad P(L \le \theta \le U) = 1 - \alpha,$$

видно, что интервал $\bar{\mathbf{y}} \mp \frac{\mathbf{Z_{\alpha/2}}\,\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\mathbf{n}}}$ является **(1–α)** или **100(1–α)** – *относительным (процентным) доверительным интервалом для средней* $\boldsymbol{\mu}$.

Если *дисперсия распределения неизвестна,* то для оценки можно использовать *выборочную дисперсию* $\mathbf{S^2}$**,** тогда величина $\frac{\bar{y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ будет соответствовать $\mathbf{t}$ **–** распределению с (***n*-1**) – степенями свободы, и **(1–α)** *или* **100(1–α)** **–** *относительный (процентный) доверительный интервал для* $\boldsymbol{\mu}$ примет вид

$$\bar{y} \mp t_{\alpha/2;n-1\frac{s}{\sqrt{n}}},$$

где $\mathbf{t_{\alpha/2;n-1}}$, – верхняя относительная (процентная) точка ***t*** *– распределения* с (**n-1**)-*степенями свободы***,** такая, при которой вероятность значений, превосходящих $\mathbf{t_{\alpha/2;n-1}}$,, равна $\boldsymbol{\alpha/2}$.

## 3. СВЯЗЫВАНИЕ ВЕЛИЧИН

Обычно при построении диаграммы одновременно возможно определить величину показателя, характеризующего тесноту связи между двумя переменными. Но диаграммы с различными данными (качественными и количественными) не могут дать ответ, как тесно эти данные связаны. Например, «оценить тесноту связи между валютным курсом и ценой углеводородов».

Вот несколько примеров вида точечных диаграмм (рис. 18…20).


Рис.18. Точечная диаграмма «Валютный курс – цена углеводородов». Диаграмма связывания количественных величин

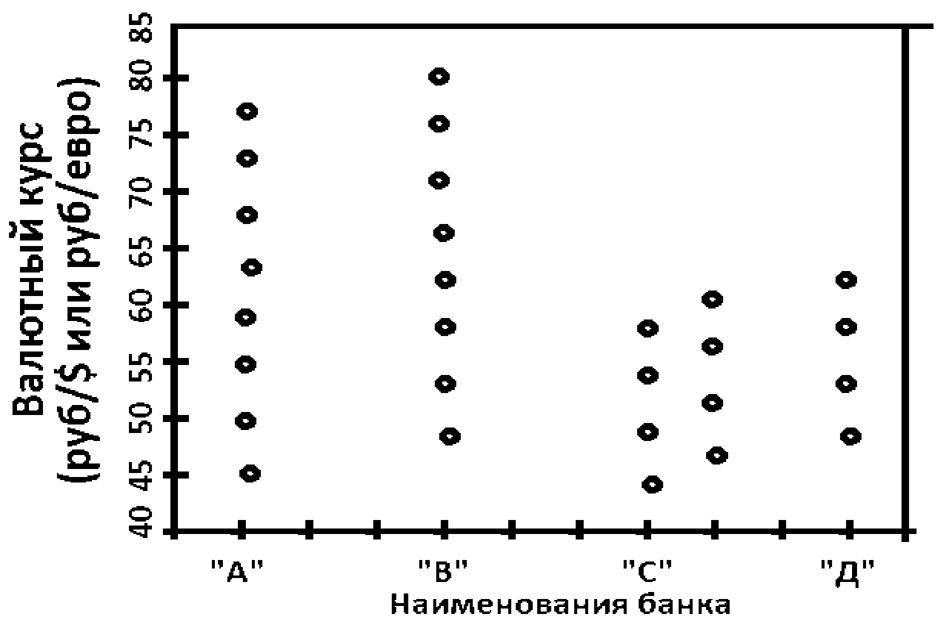


Рис.19. Точечная диаграмма «Валютный курс – наименование банка» Диаграмма связывания количественных и качественных величин

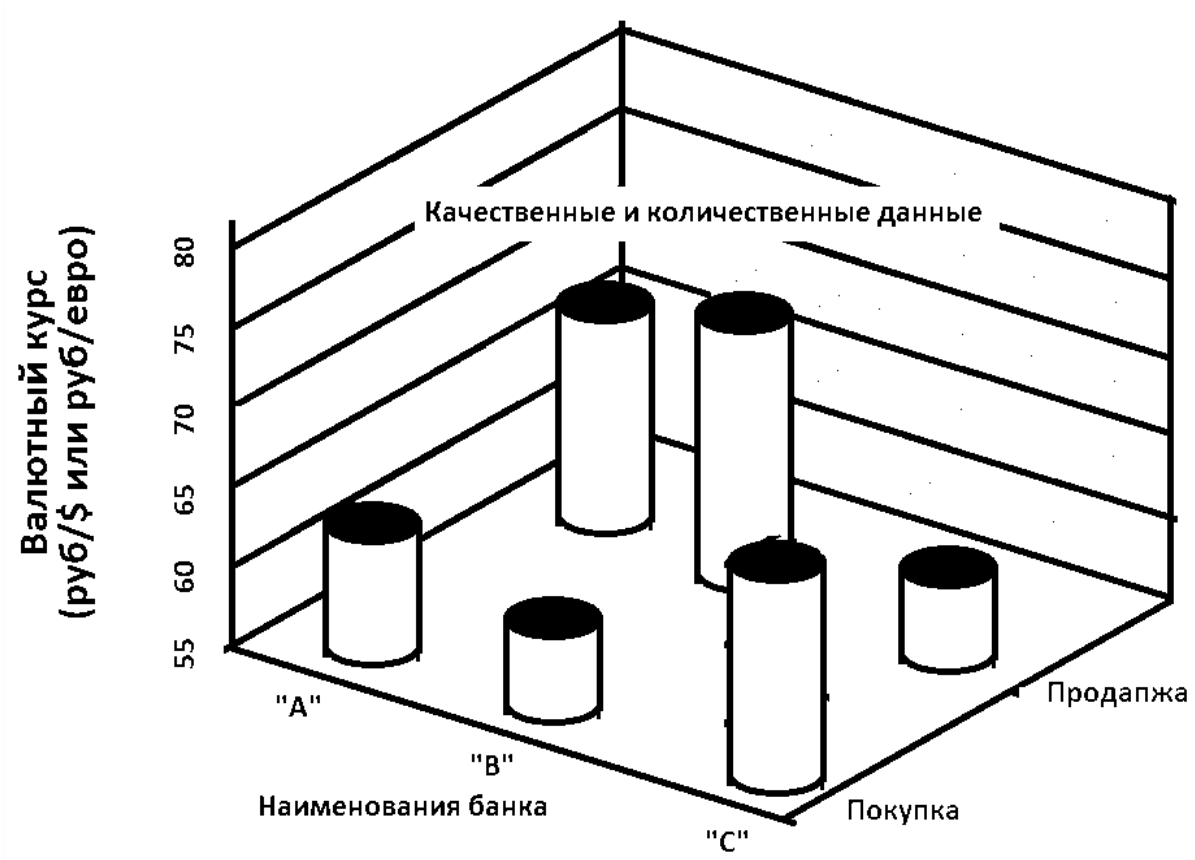

Рис.20. Диаграмма связывания количественных и качественных величин «Валютный курс – наименование банка – покупка продажа»

## 3.1. Коэффициент линейной корреляции

В зависимости от того, какие имеются данные, различается и показатели оценки тесноты связи, табл.12. Когда между двумя переменными существует тесная связь, то коэффициент корреляции приближается к «1», а когда связь слабеет, коэффициент приближается к «0».

Таблица 12

Различия показателей и данных

| Тип данных | Показатель статистики | Значения | Расчётная формула* |
|---|---|---|---|
| Количественные и количественные | Коэф. линейной корреляции | -1…1 | $\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{(x-\bar{x})^2\sum(y-\bar{y})^2}}=\frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{yy}}}$ |
| Количественные и качественные | Корреляционное соотношение | 0…1 | $\frac{М_{гр.д}}{Вн_{гр.д}+М_{гр.д}}$ |
| Качественные и качественные | Коэф. корреляции Крамера | 0…1 | $\sqrt{\frac{x_0^2}{n(\min[к-во\ строк\times к-во\ ст-в]-1)}}$ |

* $Вн_{гр.д}$– *внутренняя групповая дисперсия;* $М_{гр.д}$ *– межгрупповая дисперсия*

***Коэффициент корреляции Крамера.*** Например, оценка информации по мнениям экспертов («качество-качество», отрывочная и неполная информация отдельных респондентов). Произведён сбор информации 300 респондентов о качестве товара различных предприятий: «BENETTON»; «ZARA»; «O'STIN». Результат расчёта коэффициентов представлен в табл. 13–17.

Таблица13

Таблица возможной сопряжённости экспертов «по полу» и оценки качества продукции предприятий

| Наименование пола эксперта и их количество *(«N-Ж» «N-М»)* | Оценка качества товара на «ОТЛИЧНО» предприятий | | | Итого |
|---|---|---|---|---|
| | «BENETTON» | «ZARA» | «O'STIN» | |
| *«N-Ж»* | 34 | 61 | 53 | 148 |
| *«N-М»* | 38 | 40 | 74 | 152 |
| Всего оценок экспертов | 72 | 101 | 127 | 300 |

Таблица 14

Возможная сопряжённость «ПОЛА» эксперта и «ФИРМЫ», %

| Наименование пола эксперта и их количество *(«N-Ж» «N-М»)* | Оценка качества товара на «ОТЛИЧНО» предприятий | | | Итого,% |
|---|---|---|---|---|
| | «BENETTON» | «ZARA» | «O'STIN» | |
| *«N-Ж»* | 23 | 41 | 36 | 100 |
| *«N-М»* | 25 | 26 | 49 | 100 |
| Всего оценок экспертов | 24 | 34 | 42 | 100 |

Это означает, что из152 экспертов «мужчин» 74 (или 49%) отдали предпочтение продукции фирмы «O'STIN», табл.14.

Таблица 15

Оценка эмпирических частот – ЭЧ*

| Наименование пола эксперта и их количество («N-Ж» «N-М») | Оценка качества товара на «ОТЛИЧНО» предприятий | | | Сумма ЭЧ ($Э_{Si}$) | Число строк |
|---|---|---|---|---|---|
| | «BENETTON» | «ZARA» | «O'STIN» | | |
| «N-Ж» – эмпирические частоты $ЭЧ_{1,i}$ | 34 | 61 | 53 | 148 | 1 |
| «N-М» – эмпирические частоты $ЭЧ_{2,j}$ | 38 | 40 | 74 | 152 | 1 |
| Всего оценок экспертов – общее число эмпирических частот – $ЭЧ_{N,i}$ | 72 | 101 | 127 | 300 | 2 |
| Число столбцов | 1 | 1 | 1 | | 3 |
| Расчётная формула $ЭЧ_N = \sum ЭЧ_{Nj} = \sum Э_{Si\ респ}$ | | | | | |

Таблица 16

Оценка теоретических частот – ТЧ

| Фирма | «BENETTON» | «ZARA» | «O'STIN» | Сумма ТЧ ($SТЧ_{i,j}$) | Число строк |
|---|---|---|---|---|---|
| «N-Ж» – теоретические частоты $ТЧ_{1,i}$ | 35,52 | 49,83 | 62,52 | 148 | 1 |
| «N-М» – теоретические частоты $ТЧ_{2,j}$ | 36,48 | 51,17 | 64,35 | 152 | 1 |
| Общее число теоретических частот $ТЧN_{i,j}$ | 72,00 | 101,0 | 127,0 | 300 | 2 |
| Расчётная формула $ТЧ_{i,j} = \frac{ЭЧ_{Nj} \times Э_{Si}}{ЭЧ_N}$ | | | | | |
| Число столбцов | 1 | 1 | 1 | | 3 |

Табл.14 (окончание)

Определение относительного коэффициента корреляции

| Наименование пола эксперта и их количество («N-Ж» «N-М») | Оценка качества товара на «ОТЛИЧНО» предприятий | | | Сумма |
|---|---|---|---|---|
| | «BENETTON» | «ZARA» | «O'STIN» | |
| «N-Ж» – относительный коэф. корреляции – $Кр_{1,j}$ | 0,0650 | 2,5056 | 1,4873 | 4,0579 |
| «N-М» – относительный коэф. корреляции – $Кр_{2,j}$ | 0,0633 | 2,4396 | 1,4482 | 3,9511 |
| Коэф. согласия «ПИРСОНА» – $\chi^2$ | 0,1283 | 4,9452 | 2,9355 | 8,0090 |
| Коэффициент корреляции «Крамера» – $К_{Крам}$ | $ОКК_{i,j} = \frac{(ЭЧ_{i,j} - ТЧ_{i,j})}{ТЧ_{i,j}}$ | | | $\chi^2_o$ |
| | $К_{Крам} = \sqrt{\frac{\chi^2_o}{N(\min(a;b)-1)}} = 0{,}1634$ , где $N$ – общее число единиц совокупности; $\min(a,b)$; а – количество строк в столбце; b – количество столбцов в таблице (из величин а и $b$ – выбирается меньшая) | | | |
| Следовательно, по коэффициенту корреляции «Крамера» качественные факторы – «ПОЛ» – «ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ТОВАРА» имеют «слабую корреляционную связь» | | | | |

**Примечание. $ЭЧ_{n,i}$ – эмпирическая частота (как часто встречается данная оценка), $Э_{Si}$ – эквивалент общему числу эмпирических частот – $ЭЧ_N$, $ТЧ_{N,I}$ – эквивалент общему числу теоретических частот.*

***Определение тесноты связи между количественными показателями.*** Представлены данные по курсам: ЕВРО – € или Доллара – $ в сопоставлении ценам на «Углеводороды» (нефть или газ). Необходимо определить тесноту связи между величинами (см. табл.18,19).

Таблица 18

Определить тесноту связи между величинами

| Дата (временной фактор) в 2014 г | | Наименование величины | Величина |
|---|---|---|---|
| качественный | количественный | | |
| Октябрь | 01 10 14 | Курс, руб. за доллар | 39,38 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 94,83 |
| Октябрь | 10 10 14 | Курс, руб. за доллар | 40,18 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 92,33 |
| | 20 10 14 | Курс, руб. за доллар | 41,35 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 90,23 |
| | 30 10 14 | Курс, руб. за доллар | 43,65 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 85,83 |
| Ноябрь | 01 11 14 | Курс, руб. за доллар | 42,23 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 84,43 |
| | 10 11 14 | Курс, руб. за доллар | 43,38 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 85,33 |
| | 20 11 14 | Курс, руб. за доллар | 47,55 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 82,53 |
| | 30 11 14 | Курс, руб. за доллар | 53,55 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 73,63 |
| Декабрь | 01 12 14 | Курс, руб. за доллар | 52,23 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 74,73 |
| | 10 12 14 | Курс, руб. за доллар | 52,28 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 70,63 |
| | 20 12 14 | Курс, руб. за доллар | 55,25 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 68,35 |
| | 30 12 14 | Курс, руб. за доллар | 56,25 |
| | | Нефть марки Brent, $ за баррель (бочка) | 57,04 |

Таблица 19

Вычисление коэффициента линейной корреляции
(оценка тесноты связи по курсу доллара и ценой углеводородов)

| Дате | Качественные данные | Величина | | Расчётные величины | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Курс, руб. за $ | «Brent», $ за баррель | | | | | |
| | | x | y | $x-\bar{x}$ | $y-\bar{y}$ | $(x-\bar{x})^2$ | $(y-\bar{y})^2$ | $(x-\bar{x})\times$ $\times(y-\bar{y})$ |
| 01 10 14 | Октябрь | 37,38 | 92,83 | -0,127 | 4,3391 | 0,0160 | 18,828 | -0,5496 |
| 10 10 14 | | 36,18 | 90,33 | -1,327 | 1,8391 | 1,7600 | 3,3825 | -2,4399 |
| 20 10 14 | | 36,95 | 89,23 | -0,557 | 0,7391 | 0,3098 | 0,5463 | -0,4114 |
| 30 10 14 | | 41,65 | 82,83 | 4,1433 | -5,660 | 17,1671 | 32,045 | -23,454 |
| 01 11 14 | Ноябрь | 40,23 | 75,43 | 2,7233 | -13,07 | 7,4165 | 170,585 | -35,569 |
| 10 11 14 | | 39,38 | 77,33 | 1,8733 | -11,16 | 3,5093 | 124,564 | -20,908 |
| 20 11 14 | | 38,55 | 90,53 | 1,0433 | 2,0391 | 1,0885 | 4,15821 | 2,1275 |
| 30 11 14 | | 37,45 | 91,63 | -0,0567 | 3,1391 | 0,0032 | 9,85436 | -0,1778 |
| 01 12 14 | Декабрь | 36,23 | 91,73 | -1,2767 | 3,2391 | 1,6298 | 10,4922 | -4,1353 |
| 10 12 14 | | 35,28 | 92,63 | -2,2267 | 4,1391 | 4,9580 | 17,1327 | -9,2165 |
| 20 12 14 | | 35,15 | 93,35 | -2,3567 | 4,8591 | 5,5538 | 23,6115 | -11,451 |
| 30 12 14 | | 35,65 | 94,04 | -1,8567 | 5,5491 | 3,4472 | 30,7932 | -10,303 |
| | Сумма | **450,08** | **1061, 9** | | | **SSxx** | **SSyy** | **SSxy** |
| | Среднее | **37,507** | **88,492** | | | **46,859** | **445,9** | **-116,48** |
| | по | **x** | **y** | **-0,806** $\frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}\cdot SS_{yy}}}$ | | | | |

Результат расчёта составил ***-0,806,*** что близко к ***«-1»***. Т. е. между курсом доллара и ценой углеводородов существует «тесная обратная связь». Когда коэффициент корреляции отрицательный, как в рассматриваемом случае, то можно говорить о *«тесной обратной связи»*, а если коэффициент положительный, то – об *«прямой связи»*. При нулевой величине значения коэффициента *«связь»* отсутствует. При данной оценке результатов наблюдений нет какого-то определённого значения коэффициента корреляции, когда две переменные считаются тесно связанными. Есть только относительная (или *«ориентированная»*) величина критерия коэффициента линейной корреляции (рис. 21).

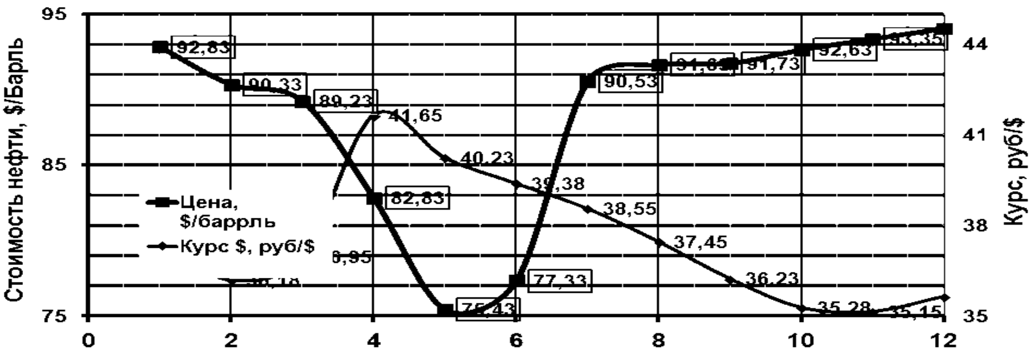


Рис. 21. Линейная гистограмма со значениями наблюдаемых величин при корреляционной оценке

***Определение тесноты связи между качественными и количественными показателями.*** Представлены данные по дате и ценой «углеводородов». Задача сводится к оценке тесноты связи между величинами (см. табл.18, 20).

Таблица 20

Вычисление корреляционных отношений по дате изменения и ценой углеводородов)

<table>
<tr><td rowspan="4">№ п.п.</td><td rowspan="4">Дата, год, квартал</td><td colspan="4">Временной период и цена углеводородов, $ за баррель</td><td colspan="3">Расчётные величины дисперсии</td></tr>
<tr><td rowspan="2">октябрь</td><td rowspan="2">ноябрь</td><td rowspan="2">декабрь</td><td rowspan="3">Ni-число вел. Yi</td><td colspan="3">Дисперсии по строке $(y-\bar{y})^2$</td></tr>
<tr><td>$SS_1$</td><td>$SS_2$</td><td>$SS_3$</td></tr>
<tr><td>$Y_1$</td><td>$Y_2$</td><td>$Y_3$</td><td>$(y_i-\bar{y}_1)^2$</td><td>$(y_i-\bar{y}_2)^2$</td><td>$(y_i-\bar{y}_3)^2$</td></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="4">2014 год, квартал 4</td><td>92,83</td><td>75,43</td><td>91,73</td><td rowspan="6">3</td><td>16,200</td><td>68,890</td><td>1,458</td></tr>
<tr><td>2</td><td>90,33</td><td>77,33</td><td>92,63</td><td>2,3256</td><td>40,960</td><td>0,094</td></tr>
<tr><td>3</td><td>89,23</td><td>90,53</td><td>93,35</td><td>0,1806</td><td>46,240</td><td>0,170</td></tr>
<tr><td>4</td><td>82,83</td><td>91,63</td><td>94,04</td><td>35,700</td><td>62,410</td><td>1,215</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">Количество значений, ni</td><td>$n_1$</td><td>$n_2$</td><td>$n_3$</td><td colspan="3" rowspan="2">$\sum SS_i$</td></tr>
<tr><td></td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="3">шаг-1</td><td>Сумма по столбцу Yi</td><td>355,22</td><td>334,92</td><td>371,75</td><td>Сумма (столбец) Yi</td><td>54,4075</td><td>218,5</td><td>2,938</td></tr>
<tr><td>Среднее по столбцу $\bar{y}_i$</td><td>88,805</td><td>83,73</td><td>92,9375</td><td>Среднее (столбец) $\bar{\bar{Y}}_i$</td><td>$\sum SS_1$</td><td>$\sum SS_2$</td><td>$\sum SS_3$</td></tr>
<tr><td>Общая средняя величина $\bar{y}_{ср}$</td><td colspan="4">$\bar{Y}_{ср} = \frac{\sum Y_i}{N_i} = 88,49083$</td><td colspan="3">Суммарные дисперсии по столбцам</td></tr>
<tr><td>шаг-2</td><td>Внутригрупповая дисперсия ВГД</td><td colspan="7">22,9871479</td></tr>
<tr><td>шаг-3</td><td>Межгрупповая дисперсия МГД</td><td colspan="7">22,9871479</td></tr>
<tr><td>шаг-4</td><td>Общая дисперсия ОД</td><td colspan="7">37,1661743</td></tr>
<tr><td>шаг-5</td><td>Проверка закона сложения дисперсий СД</td><td colspan="7">45,9742958</td></tr>
<tr><td>шаг-6</td><td>Корреляционное отношение КрО</td><td colspan="7">0,61849648</td></tr>
<tr><td colspan="9">Связи между временной характеристикой и ценой на углеводороды "нет или почти нет".</td></tr>
<tr><td colspan="9">Корреляционное отношение может принимать значения [0…1]. Чем теснее взаимосвязь между переменными, тем значения отношения ближе к 1</td></tr>
</table>

# 4. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

***Гипотеза*** (от греческого hypothesis – основание, предположение, догадка) – это утверждение о значениях параметров распределения вероятностей (статистическая гипотеза в общем случае – суждение, относящееся к распределению случайной величины). Такие наблюдения могут возникать в различных областях деятельности хозяйственных субъектов. Вот некоторые примеры:

1. сведения поставщика деталей о своей продукции правильные.
2. сведения поставщика деталей о своей продукции ложные.
3. новый метод обучения лучше, чем старый.
4. стандарт по чистоте воздуха в городе не выполняется.
5. данные о занятости населения предполагают наличие дискриминационной политики при найме на работу.

Перечисленные гипотезы являются статистическими сведениями экспертов и они имеют общие признаки:

1. вероятности определения сведений поставщика о свой продукции равны. Что указывает на равномерное распределение случайной переменной, которая представляет собой число равнозначной информации.
2. размер деталей, поступивших от поставщика, больше, чем он заявлял (отличается от заявленной).
3. средняя оценка стандартного тестирования обучавшихся по новому методу выше, чем у обучавшихся по традиционному методу.
4. значения параметров, характеризующих чистоту воздуха в городе, превышает, чем установлено стандартом.
5. для некоторых работодателей переменная «принятие на работу» не будет независимой от переменной «пол» (или «этническая принадлежность», «вероисповедание» и т. д.).

Для каждого из этих примеров практически невозможно непосредственно определить истинность гипотезы. Например, практически невозможно измерить длину каждой из сотен, а может быть и тысяч поступающих деталей. Или произвести проверку знаний всех студентов, которые должны обучаться по новому методу в ближайшие 15 лет. Конечно, можно протестировать студентов через год после окончания обучения. Но оценку эффективности нового метода нужно делать до его реализации, а не после. А для гипотезы (4) можно ли проверить каждый кубический метр воздуха в городе? И, наконец, что означает в 5-й гипотезе прямая верификация для каждого человека?

Из-за невозможности определить истинность оценки экспертов прямым путем, приходится «проверять» гипотезы, т.е. устанавливать, не противоречит ли высказанная экспертная гипотеза имеющимся выборочным данным. Эта процедура носит название *статистической проверки гипотез*.

Результат сопоставления высказанных гипотез с выборочными данными может быть либо *отрицательным* (данные наблюдения противоречат высказанной гипотезе, а поэтому гипотезу надо *отклонить*), либо *неотрицательным* (данные наблюдения не противоречат высказанной гипотезе, а поэтому ее можно *принять* в качестве одного из возможных решений). Например, если предположить, что средний выход *продукта* какого-либо производства составляет 94,5%. Такое утверждение можно представить в формализованном виде как

$$\mathrm{H}_0: \quad \mu = 94{,}5;$$

$$H_1: \quad \mu \neq 94{,}5.$$

Утверждение $\mathrm{H}_0: \quad \mu = 94{,}5$ – называется *нулевой гипотезой*, а утверждение $\mathrm{H}_1: \quad \mu \neq 94{,}5$ – называется *альтернативной гипотезой.* Поскольку $\mathrm{H}_1$ – определяет значения μ, которые *либо больше, либо меньше 94,5* т.е. отношение $94{,}5 \ < \mu > 94{,}5$ есть *двусторонняя альтернатива.* Значение среднего утверждение $\mu = 94{,}5$, задаваемого нулевой гипотезой $\mathrm{H}_0: \quad \mu = 94{,}5$ , определяется одним из трёх способов:

1. *среднее может быть известно* из результатов ранее проводившихся экспериментов (наблюдений);
2. *среднее может быть известно* из теории исследуемого процесса (по полученной модели);
3. *среднее может быть известно* из заданных условий.

Проверка гипотезы состоит в следующем. Производится случайная выборка наблюдений $y_{\mathrm{i}}$, по которой находится значение *некоторой статистики*, и принимается решение, отклонить или принять *нулевую гипотезу* $\mathrm{H}_0: \quad \mu = 94{,}5$. Для этого необходимо знать распределение статистики, используемой для проверки, в предположении истинности *нулевой гипотезы* $\mathrm{H}_0: \quad \mu = 94{,}5$, а так же «*множество знаний статистики»***,** которые привели бы к отклонению гипотезы. Такое *множество знаний статистики* называется критической областью, или *областью отклонения гипотезы.* При оценке гипотез встречаются «ошибки» («погрешности») *двух родов:*

1. если нулевая гипотеза $\mathrm{H}_0$ *отклоняется, когда она истина,* то совершается «ошибка» («погрешность») *1-го рода;*
2. если нулевая гипотеза $\mathrm{H}_0$ *не отклоняется, когда она ложна,* то совершается «ошибка» («погрешность») *2-го рода.*

Вероятностям этих погрешностей присвоены специальные обозначения: α=P – допустить «погрешность» *1-го рода*, т. е. отклонить, когда $H_0$ *– истина;* β=P – допустить «погрешность» *2-го рода*, т. е. не отклонить, когда $\mathrm{H}_0$ *– ложна***.**

Кроме того, часто применяется такое понятие, как *«мощность критерия»*, которое определяется как мощность $= 1 - \beta = P$ отклонить, когда $H_0$ – *ложна.* При проверке гипотез в общем случае задаётся величина *α-вероятность* – «ошибка» («погрешность») *1-го рода*, которая называется «УРОВНЕМ ЗНАЧИМОСТИ» *критерия* и выбирается процедура проверки, обеспечивающую малую (приемлемую) величину «ошибки» 2-го рода, т. е. *β-вероятность.*

### 4.1. Проверка гипотез относительно средних

Вот несколько часто встречающихся задач на проверку гипотез.

1. Сравнение средних при известной дисперсии.
2. Сравнение средних при неизвестной дисперсии.
3. Сравнение дисперсий.

*В начале, когда $y_i$ есть нормальная случайная переменная с неизвестным средним $\mu$,* и известной дисперсией $\sigma^2$. Необходимо проверить гипотезы

$$H_0: \quad \mu = \mu_0;$$

$$H_1: \quad \mu \neq \mu_0,$$

где $\mathbf{\mu_0}$ – заданная средняя величина.

Для проверки нулевой гипотезы $H_0: \quad \mu = \mu_0$ необходимо на основе выборки из $\mathbf{n}$-наблюдений $\mathbf{y_i}$ найти численное значение *относительной (процентной) точки статистики*

$$Z_0 = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}},$$

лежащей в основе критерия оценки. Нулевая гипотеза $H_0: \quad \mu = \mu_0$ отклоняется, если выполнено условие

$$|Z_0| > Z_{\alpha/2},$$

где $Z_{\alpha/2}$ – *верхняя* $\alpha/2$ *относительная (процентная) точка стандартизованного нормального распределения.*

Процедура проверки обоснуется следующим образом:

1. в соответствие с *«центральной предельной теоремой»* выборочное среднее есть $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2/\mathbf{n})$, поэтому, если $H_0$ – *истина,* то величина $Z_0$ из

соотношения $\mathbf{Z_0} = \frac{\bar{y}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ подчиняется закону $\mathbf{N(0,1)}$ и, значит, можно ожидать, что **(1–α)** – *доверительная вероятность* или **100(1–α)** – доверительных процентов значений $\mathbf{Z_0}$ попадут в интервал между $-\mathbf{Z_0}$ и $\mathbf{Z_{\alpha/2}}$;

2. появление выборки, для которой $\mathbf{Z_0}$ лежит вне этого интервала, т. е. интервала ($-\mathbf{Z_0}$ и $\mathbf{Z_{\alpha/2}}$), было бы условием *истинности* нулевой гипотезы $\mathbf{H_0}: \ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0}$; чем-то необычным и дало бы основания для отклонения нулевой гипотезы $\mathbf{H_0}$. Необходимо отметить, что **α=P** – *допустить «ошибку» (погрешность) 1-го рода здесь используется как критерий оценки.*

При решении ряда задач может оказаться желательным отклонять нулевую гипотезу $H_0$ только при условии, что истинное значение среднего $\boldsymbol{\mu}$ *превосходит* $\boldsymbol{\mu_0}$, т. е. может быть принята гипотеза $H_1: \ \mu > \mu_0$. В этом случае формулируется *односторонняя альтернатива, т. е.* $\mathbf{H_1}: \ \boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\mu_0}$, и нулевая гипотеза $\mathbf{H_0}: \ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0}$ отклоняется при доверительных процентах значений $\mathbf{Z_0} > \mathbf{Z_\alpha}$.

Если же необходимо отклонять нулевую гипотезу $\mathbf{H_0}: \ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0}$ только при $\boldsymbol{\mu}$ меньше $\boldsymbol{\mu_0}$ то, в качестве *альтернативной гипотезы* принимается $\mathbf{H_1}: \ \boldsymbol{\mu} > \boldsymbol{\mu_0}$, а нулевая гипотеза $\mathbf{H_0}: \ \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu_0}$ отклонении, если выполняется соотношение доверительных процентов значений $\mathbf{Z_0} < -\mathbf{Z_\alpha}$.

Другой случай. *Есть две* $\mathbf{y_1}$ и $\mathbf{y_2}$ *нормальные случайные переменные с неизвестными средними* $\boldsymbol{\mu_1}$ и $\boldsymbol{\mu_2}$**,** отличающиеся друг от друга на постоянную величину $\boldsymbol{\gamma}$ и известными дисперсиями $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ и $\boldsymbol{\sigma_2^2}$. Необходимо проверить гипотезу, которая в формализованном виде имеет вид

$$\begin{cases} H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq \gamma \end{cases}.$$

В этом случае для проверки гипотезы $\begin{cases} H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq \gamma \end{cases}$ берётся случайная выборка из $\mathbf{n_1}$ – наблюдений из первой совокупности и $\boldsymbol{n_2}$ – наблюдений из второй совокупности, после чего рассчитывается относительное (процентное) численное значение статистики

$$Z_0 = \frac{\overline{y_1} - \overline{y_2} - \gamma}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

причём $\sigma_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_{i=1}^{n}(\bar{y} - y_i)^2$ Гипотеза $\begin{cases} H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq \gamma \end{cases}$ «отклоняется», если выполнено условие $|Z_0| > Z_{\alpha/2}$.

При одной односторонней альтернативе $\mathbf{H_1}: \ \boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_2} > \boldsymbol{\gamma}$ *нулевая гипотеза* $\mathbf{H_0}: \ \boldsymbol{\mu_1} - \boldsymbol{\mu_2} = \boldsymbol{\gamma}$ *отклоняется, если* $\mathbf{Z_0} > \mathbf{Z_\alpha}$.

При другой односторонней альтернативе $\mathbf{H_1}$: $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 < \gamma}$ *нулевая гипотеза* $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 = \gamma}$ *отклоняется, если* $\mathbf{Z_0 < -Z_\alpha}$.

Условия проверки рассмотренных гипотез приведены в табл. 21.

Таблица 21

Проверка гипотез относительно средних при известной дисперсии

| Оцениваемые гипотезы | Статистика для проверки (нормальное распределение) | Критерии отклонения |
|---|---|---|
| $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_0: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ | $Z_0 = \dfrac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ | $\lvert Z_0 \rvert > Z_{\alpha/2}$ |
| $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_0: & \mu < \mu_0 \end{cases}$ | | $Z_0 < -Z_\alpha$ |
| $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_0: & \mu > \mu_0 \end{cases}$ | | $Z_0 > Z_\alpha$ |
| $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq \gamma \end{cases}$ | $\boldsymbol{Z_0} = \dfrac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \gamma}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ | $\lvert Z_0 \rvert > Z_{\alpha/2}$ |
| $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 < \gamma \end{cases}$ | | $Z_0 < -Z_\alpha$ |
| $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 > \gamma \end{cases}$ | | $Z_0 > Z_\alpha$ |

**Пример 1.** Оценка гипотез на основе стандартизованного нормального распределения. Предприятие, которое реализует волокно, интересует, превосходит ли средняя цена 1м$^2$ за партию в 200 \$. Известно: цена 1м$^2$ волокна составляет 200 \$; стандартное отклонение от цены составляет 10 \$ за 1м$^2$ . Выборка цены волокна составила 4; выборочное среднее цены равно 214\$ за 1м$^2$. Необходимо проверить гипотезу $\begin{cases} H_0: & \mu = 200\$; \\ H_1: & \mu > 200\$ \end{cases}$ с вероятностью $\boldsymbol{\alpha} = \cdots$??

*Решение*

1. Числовое значение статистики, используемое для проверки нулевой гипотезы $H_0$: $\mu = 200\$$ равно

$$Z_0 = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{214 - 200}{10/4} = 2{,}800.$$

Ссылка на таблицу 8

Кумулятивная функция стандартизированного нормального распределения

| Z | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ………… | | | | | | | | | | |
| **2,8** | ***0,99744*** | 0,99752 | 0,99760 | 0,99767 | 0,99774 | 0,99781 | 0,99788 | 0,99795 | 0,99701 | 0,99807 |
| 2,9 | 0,99813 | 0,99819 | 0,99825 | 0,99831 | 0,99836 | 0,99841 | 0,99846 | 0,99851 | 0,99856 | 0,99861 |

*Если* по условию задаётся «ошибка» (вероятности) 1-го рода для $\boldsymbol{\alpha} = \cdots$, *то* в соответствии с табл. 8 (кумулятивная функция стандартизированного нормального распределения) равна

$$\mathbf{Z}_{\alpha=\cdots} = \mathbf{0,9974 - 0,5 = 0,49744}.$$

*Т. е.* числовое значение статистики $Z_0 = 2{,}800$, которое можно представить как $\mathbf{Z_0 = 2,80 + 0,00 = 2,800}$. Десятые и сотые доли величины $\mathbf{Z}$ необходимо представить так, чтобы по горизонтали (табл. 8) **Z= 0,000,** а по вертикали – **Z= 2,800.** На пересечении горизонтальных и вертикальных значений величины $\mathbf{Z}$ в соответствующей ячейки стоит число **0,99744.** Тогда площадь заштрихованного участка (рис.22) под кривой в относительных единицах за минусом 0,5 – соответствующей площади под кривой с положительными величинами средней $\boldsymbol{\mu}$ *(все заданные средние значения по условию задачи, положительные величины)*. Таким образом, площадь под кривой стандартного нормального распределения (см. рис.19) будет равна $\mathbf{0,99744 - 0,5 = 0,49744 = Z_{\alpha=\cdots}}$, что соответствует *«значению статистики»* принимаемое как критерий оценки нулевой гипотезы. Значение статистики $\mathbf{Z_0 = 2,800} > Z_{\alpha=\cdots} = \mathbf{0,49744}$.

2. *Таким образом, нулевая гипотеза* $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{200}$ \$ *«отклоняется»,* так как представленный критерий отклонения гипотезы соответствует условию $|\mathbf{Z_0}| > \mathbf{Z_{\alpha/2}}$, а именно $(|\mathbf{2,800}| > 0{,}99774/2)$. И вывод *заключается в том, что средняя цена по партии не равна 200 \$ за 1 м$^2$ волокна.*

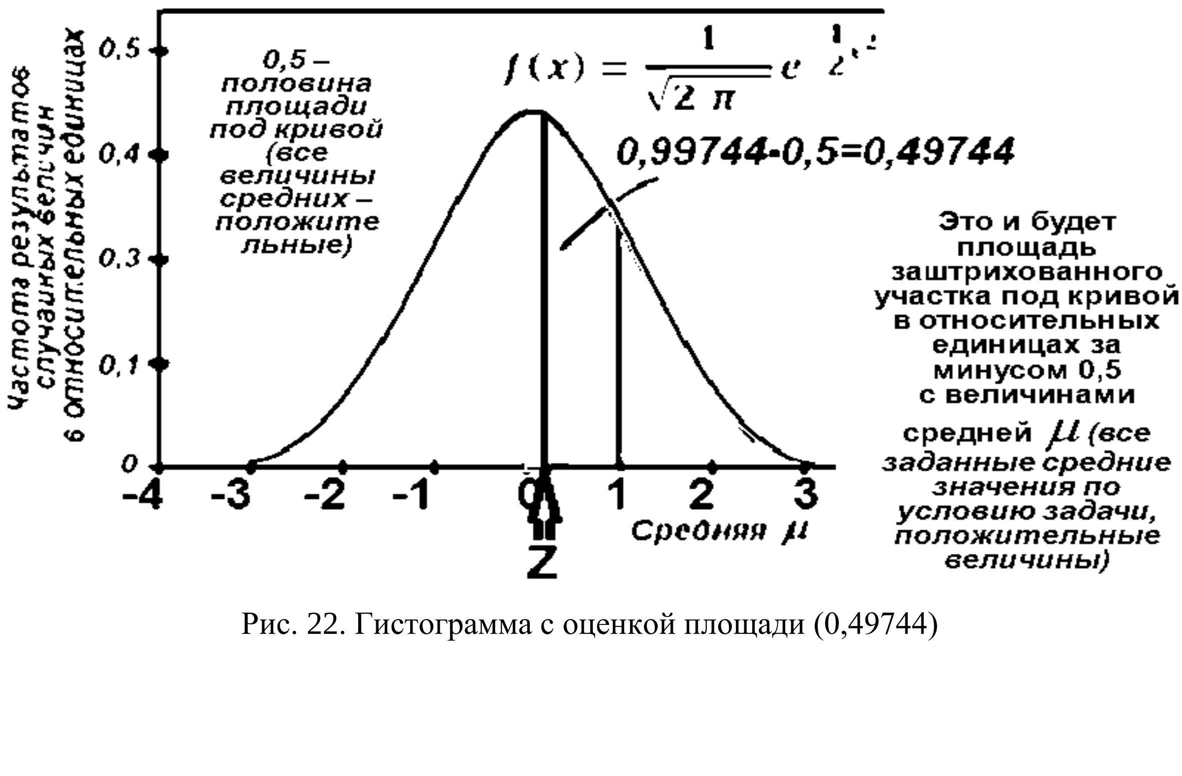


Рис. 22. Гистограмма с оценкой площади (0,49744)

3. *Так как нулевая гипотеза* $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\mu = 200}$ $ «*отклоняется», то целесообразна проверка двусторонних гипотез.* Проверка гипотезы по критерию отклонения $\mathbf{Z_0 > Z_\alpha}$

$$\begin{Bmatrix} H_o:\ \mu = \mu_o \\ H_1:\ \mu > \mu_o \end{Bmatrix}$$

Альтернативная гипотеза $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\mu} > 200$ $ «отклоняется», так как представленный критерий отклонения гипотезы соответствует условию $\mathbf{Z_0 > Z_\alpha}$**,** а именно **(**$\mathbf{2{,}800} > 0{,}99774$**).** И вывод заключается в том, что средняя цена по партии не превосходит 200 $ за 1 м$^2$ волокна.

**4.** *Так как альтернативная гипотеза* $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\mu} > 200$ $ «*отклоняется», то целесообразно проверить гипотезу* $\begin{Bmatrix} \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu = \mu_o} \\ \mathbf{H_1}:\ \boldsymbol{\mu < \mu_o} \end{Bmatrix}$. по критерию отклонения $\mathbf{Z_0 < -Z_\alpha}$. *Альтернативная гипотеза* $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\mu} < 200$ $ «не *отклоняется»,* так как представленный критерий отклонения гипотезы не соответствует критерию отклонения $\mathbf{Z_0 < -Z_\alpha}$**,** а именно **(**$\mathbf{2{,}800}$ не меньше $(\mathbf{-0{,}99774})$**).** И вывод *заключается в том, что средняя цена по партии не превосходит 200 $ за 1 м*$^2$ *волокна.*

***Если дисперсия распределения совокупности неизвестна,*** то приходится делать *«дополнительные предложения о нормальности распределения».* При этом необходимо учитывать то, что небольшие отклонения от «нормальности» не приводят к существенному (значимому) искажению результата. При проверке гипотез $\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0; \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ в случае неизвестной дисперсии для оценки $\boldsymbol{\sigma^2}$ используется выборочная дисперсия $\mathbf{S^2}$. Заменяя в выражении *относительной (процентной) точки статистики* $Z_0 = \frac{\bar{y}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ *«дисперсию»* $\boldsymbol{\sigma^2}$ на ***«выборочную дисперсию»*** $\mathbf{S^2}$, *получается* статистика для проверки гипотезы

$$t_0 = \frac{\bar{y}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}.$$

Нулевая гипотеза $\mathbf{H_0}$: $\boldsymbol{\mu = \mu_0}$ отклоняется, если выполняются условия $|\mathbf{t_0}| > \mathbf{t_{\alpha/2;n-1}}$, где $\mathbf{t_{\alpha/2;n-1}}$ – верхняя $\boldsymbol{\alpha/2}$ – относительная (процентная) точка ***t***-распределения с $\mathbf{n-1}$ степенями свободы.

Условия проверки рассмотренных гипотез приведены в табл. 22.

Таблица 22

Проверка гипотез относительно средних
нормально распределённых совокупностей при неизвестной дисперсии

| Оцениваемые гипотезы | Статистика для проверки (нормальное распределение) | Критерии отклонения |
|---|---|---|
| $\begin{cases} H_0: \ \mu = \mu_0 \\ H_0: \ \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ | $t_0 = \frac{\bar{y} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$ | $\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2;n-1}$ |
| $\begin{cases} H_0: \ \mu = \mu_0 \\ H_0: \ \mu < \mu_0 \end{cases}$ | | $t_0 < -t_{\alpha;n-1}$ |
| $\begin{cases} H_0: \ \mu = \mu_0 \\ H_0: \ \mu > \mu_0 \end{cases}$ | | $t_0 > t_{\alpha;n-1}$ |
| $\begin{cases} H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq \gamma \end{cases}$ | при $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $t_{0(S_p)} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \gamma}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$, $\nu_{(S_p)} = n_1 + n_2 - 2$, где $S_p^2 = \frac{(n_1 - 1) * S_1^2 + (n_2 - 1) * S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ | $\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2;\nu}$ |
| $\begin{cases} H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 < \gamma \end{cases}$ | | $t_0 < -t_{\alpha;\nu}$ |
| $\begin{cases} H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 > \gamma \end{cases}$ | | $t_0 > t_{\alpha;\nu}$ |
| $\begin{cases} H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq \gamma \end{cases}$ | при $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $t_{0(S)} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \gamma}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$ $\boldsymbol{\nu_{(S)}} = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1 + 1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2 + 1}} \mathbf{- 2}$ | $\lvert t_0 \rvert > t_{\alpha/2;\nu}$ |
| $\begin{cases} H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 < \gamma \end{cases}$ | | $t_0 < -t_{\alpha;\nu}$ |
| $\begin{cases} H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 > \gamma \end{cases}$ | | $t_0 > t_{\alpha;\nu}$ |

Например, есть две совокупности, распределённые нормально с *неизвестными средними* $\boldsymbol{\mu_1}$ и $\boldsymbol{\mu_2}$ *неизвестными дисперсиями* $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ и $\boldsymbol{\sigma_2^2}$. Тогда процедура проверки гипотезы $\begin{cases} H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \gamma \\ H_1: \ \mu_1 - \mu_2 \neq \gamma \end{cases}$ для таких совокупностей будет зависеть от выполнения условия $\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$ или $\boldsymbol{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$.

*Случай 1, когда выполнено условие* $\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$.

*Для проверки нулевой гипотезы* $H_0: \ \mu_1 - \mu_2 = \gamma$ необходимо взять две случайные выборки объёма $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$ из первой и второй соответственно. Расчёт дисперсии производится по $\mathbf{S_p^2} = \frac{\mathbf{(n_1 - 1) \times S_1^2 + (n_2 - 1) \times S_2^2}}{\mathbf{n_1 + n_2 - 2}}$ , а числовое значение статистики по $\mathbf{t_{0(S_p)}} = \frac{\boldsymbol{\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \gamma}}{\mathbf{S_p}\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n_1}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n_2}}}}$ при числе степеней свободы

$\mathbf{t}$ – распределения $\boldsymbol{\nu}_{(\mathbf{S_p})=\mathbf{n_1}+\mathbf{n_2}-2}$, где $\mathbf{S_1^2}$ и $\mathbf{S_2^2}$ – критерии оценки выборочной дисперсии. Нулевая гипотеза $H_0\colon\ \mu_1-\mu_2=\gamma$ из совокупности $\begin{cases} H_0\colon\ \mu_1-\mu_2=\gamma \\ H_1\colon\ \mu_1-\mu_2\neq\gamma \end{cases}$ *отклоняется,* если будет выполнено условие $|\mathbf{t_0}|>\mathbf{t}_{\alpha/2;\nu}$.

*Случай 2, если нет оснований предполагать, что дисперсии одинаковы, т. е.* $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$, то в этом случае статистика для проверки гипотезы имеет вид (см. табл. 22):

$$t_{0(S)}=\frac{\bar{y}_1-\bar{y}_2-\gamma}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$$

при числе степеней свободы $t$ – распределения

$$\nu_{(S)}=\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1+1}+\frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_1+1}}-2$$

*Такая процедура проверки носит название объединённым* $\boldsymbol{t}$*-критерием, так как обе выборки объединяются для получения оценки общей дисперсии.*

**Пример.** *Проверка «гипотез» относительно средних при известной дисперсии.* Произвести оценку гипотез при известных дисперсиях совокупности, распределённой нормально при известной вероятности $\boldsymbol{\alpha}$.

***Случай, когда необходимо произвести сравнение дисперсий двух нормально распределённых совокупностей.*** Если рассмотреть случайные выборки объёма $\mathbf{n_1}$ и $\mathbf{n_2}$ соответственно из первой и второй совокупностей, то статистика для проверки *гипотезы двух дисперсий совокупности,* распределённых нормально, которые равны некоторым величинам, например, $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ и $\boldsymbol{\sigma_2^2}$. В формализованном виде эта задача выглядит так

$$\begin{cases} H_0\colon\ \sigma_1^2=\sigma_2^2; \\ H_1\colon\ \sigma_1^2\neq\sigma_2^2 \end{cases}.$$

Две экспертные организации «А» и «В» произвели оценку на предмет «отклонения отчётных данных от реальной действительности». Усреднённое количество отличительных признаков при анализе документов неизвестно: $\boldsymbol{\mu_1}$=н/н ???? и $\boldsymbol{\mu_2}$=н/н???? не нормируются. Но известна разница между средними значениями $\boldsymbol{\mu_1}$-$\boldsymbol{\mu_2}$=$\boldsymbol{\gamma}$, где $\boldsymbol{\gamma}$=...известная величина расхождения. А именно, если разница между заключениями экспертов есть, то оценка проведена верно, если нет, то требуется «повторная «независимая экспертиза». Известные показатели: количество наблюдений произведённых «экспертами А» и «В»; известна заданная вероятность $\alpha$ =....., с которой необходимо произвести оценку (см. табл.23).

Таблица 23

Исходные данные результатов оценки

| Величина показателя | | | | | | | | | Кол-во выборки ***n*** | Заданные критерии | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Y<sub></sub>*** $Y_{i-1}$ | 275 | 270 | 280 | 275 | 285 | 265 | 275 | 275 | 8 | $\gamma$ | $\alpha$ |
| $Y_{i-2}$ | 250 | 260 | 255 | 265 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | ***7*** | ***0,08*** |

***Решение.***

Средние величины выборок равны

$$\bar{y}_{1(n_1)} = \frac{1}{n_1}\sum_{i}^{n} y_i = \frac{1}{8}(275 + 270 + 280 + 275 + 285 + 265 + 275 + 275) = 275,00$$

$$\bar{y}_{2(n_2)} = \frac{1}{n_2}\sum_{i}^{n} y_i = \frac{1}{4}(250 + 260 + 255 + 265) = 257,50$$

Дисперсия $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ при $\mathbf{n_1 = 8}$ наблюдений равна:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\bar{y}_{n_1} - y_{i(n_1)}\right)^2 = \frac{1}{8}[(275-275)^2 + (275-270)^2 + (275-280)^2 + (275-275)^2 + (275-285)^2 + (275-265)^2 + (275-275)^2 + (275-275)^2] = 31,250$$

Дисперсия $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ при $\mathbf{n_2 = 4}$ наблюдений равна:

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\bar{y}_{n_2} - y_{i(n_2)}\right)^2 = \frac{1}{4}[(257,5-250)^2 + (257,5-260)^2 + (257,5-255)^2 + (257,5-265)^2] = 31,250$$

*Проверка гипотезы по статистике $Z_o$.* Значение статистики $\mathbf{Z_{0(\gamma)}}$ равно:

$$Z_0 = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2 - \gamma}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{275 - 257,5 - 7}{\sqrt{\frac{31,250}{8} + \frac{31,250}{4}}} = 3,067.$$

Числовое значение статистики можно представить $Z_o = Z_{o(цч)} + Z_{o(дробь)}$ $\mathbf{3,057 = 3,00 + 0,067}$. Табличное значение по кумулятивной функции (табл. 8) равно $\mathbf{Z_{\alpha/2} = 0,49946}$. Тогда по условию критерия отклонения $|Z_0| > Z_{\alpha/2}$ гипотеза $\left\{\begin{matrix} \mathbf{H_o:\ \mu_1 - \mu_2 = 7} \\ \mathbf{H_o:\ \mu_1 - \mu_2 \neq 7} \end{matrix}\right\}$ ***«отклоняется», т. к.*** *выполнено условие критерия отклонения* $\mathbf{|Z_o| = |3,057|}$ *не превышает табличное значение* $\mathbf{Z_{\alpha/2} = 0,49946.}$

*Так как нулевая гипотеза* $\mathbf{H_o:\ \mu_1 - \mu_2 = 7}$ ***«отклоняется»,*** *то целесообразна проверка двусторонних гипотез.* В начале, производится проверка гипотезы $\left\{\begin{matrix} \mathbf{H_o:\ \mu_1 - \mu_2 = 7} \\ \mathbf{H_o:\ \mu_1 - \mu_2} < 7 \end{matrix}\right\}$ по критерию отклонения $\mathbf{Z_0 < -Z_\alpha}$.

*Альтернативная гипотеза* $\mathbf{H_o:\ \mu_1 - \mu_2} < 7$ ***«отклоняется»,*** так как представленный критерий отклонения гипотезы $\left\{\begin{matrix} \mathbf{H_o:\ \mu_1 - \mu_2 = 7} \\ \mathbf{H_o:\ \mu_1 - \mu_2} < 7 \end{matrix}\right\}$ не соответствует условию $\mathbf{Z_0 < -Z_\alpha}$, а именно табличное значение (см. табл.8) **(**$\boldsymbol{-Z_\alpha = -0,99891}$**)** не превышает значение статистики **(**$\boldsymbol{Z_o = 3,057}$**).**

*И, наконец, альтернативная гипотеза* $\mathbf{H_o:\ \mu_1 - \mu_2} > 7$ ***«принимается»,*** так как критерий отклонения гипотезы $\left\{\begin{matrix} \mathbf{H_o:\ \mu_1 - \mu_2 = 7} \\ \mathbf{H_o:\ \mu_1 - \mu_2} > 7 \end{matrix}\right\}$ соответствует условию $\mathbf{Z_0 > Z_\alpha}$. Значение статистики $\mathbf{Z_o = 3,057 > Z_\alpha = 0,99891}$, (табл.8) поэтому отклоняется «нулевая гипотеза», а альтернативная – принимается. И вывод *заключается в том, что разница значений между оценками экспертов больше «7».*

*Проверка гипотезы по статистике* $\mathbf{t_o}$. Числовое значение статистики $\mathbf{t_{0(\gamma)}}$ равно:

$$\boldsymbol{t_{o(S_p)} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_1 - \gamma}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{275 - 257{,}5 - 7}{37{,}50\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{4}}} = 2,80,}$$

где $\mathbf{S_p}$ – точечная дисперсия $\mathbf{S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\cdot S_1^2 + (n_2 - 1)\cdot S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ при равенстве дисперсий $\boldsymbol{\sigma_1^2 = 31,250 = \sigma_2^2 = 31,250}$; $\mathbf{S_1^2}$ – точечная дисперсия показателей $\mathbf{n_1=8}$; $\mathbf{S_2^2}$ – точечная дисперсия показателей $\mathbf{n_2=4}$***;***

$$\mathbf{S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\bar{y}_{n_1} - y_{i(n_1)}\right)^2 = \frac{1}{8 - 1}[(275 - 275)^2 + (275 - 270)^2 + (275 - 280)^2 + (275 - 275)^2 + (275 - 285)^2 + (275 - 265)^2 + (275 - 275)^2 + (275 - 275)^2] = 35,714}$$

$$\mathbf{S_2^2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n_2-1}}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n_2}}\left(\bar{\mathbf{y}}_{\mathbf{n_2}}-\mathbf{y}_{\mathbf{i(n_2)}}\right)^2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4-1}}[(\mathbf{257,5-250})^2+(\mathbf{257,5-260})^2+(\mathbf{257,5} - \mathbf{255})^2+(\mathbf{257,5-265})^2] = \mathbf{41,667}$$

Тогда по условию критерия отклонения $|\mathbf{t_0}| > \mathbf{t_{\alpha/2;\nu}}$ гипотеза $\begin{cases}\mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1-\mu_2=7}\\ \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1-\mu_2\neq 7}\end{cases}$ ***«отклоняется», т. к.*** *выполнено условие критерия отклонения* $|t_o| = |2{,}80|$ *не превышает табличного значения* $\mathbf{t_{\alpha/2;\nu} = 1,01025}$ *при заданной вероятности* **α=0,08, где** $\boldsymbol{\nu_{Sp}}$ – *степень свободы при равенстве дисперсий* $\boldsymbol{\sigma_1^2=\sigma_2^2}$ **,** *определяемое по формуле* $\boldsymbol{\nu_{Sp} = n_1+n_2-2}$ $(\boldsymbol{\nu_{Sp} = 8+4-2 = 10})$.

*Так как нулевая гипотеза* $\mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1-\mu_2=7}$ ***«отклоняется»,*** *то целесообразна проверка двусторонних гипотез.*

В начале проверяется гипотеза $\begin{cases}\mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1-\mu_2=7}\\ \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1-\mu_2} < 7\end{cases}$ по критерию отклонения $\mathbf{t_0} < -\mathbf{t_{\alpha;\nu}}$. *Альтернативная гипотеза* $\mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1-\mu_2} < 7$ ***«отклоняется»,*** так как представленный критерий отклонения гипотезы $\begin{cases}\mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1-\mu_2=7}\\ \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1-\mu_2} < 7\end{cases}$ не соответствует условию $\mathbf{t_0} < -\mathbf{t_{\alpha;\nu}}$, а именно табличное значение (см. табл.10) $-\mathbf{t_{\alpha;\nu}} = -\mathbf{2,02050}$ не превышает значение статистики $(\mathbf{t_{o(S_p)}} = \mathbf{2,80})$. *И, наконец, альтернативная гипотеза* $\mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1-\mu_2} > 7$ ***«принимается»,*** так как критерий отклонения гипотезы $\begin{cases}\mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1-\mu_2=7}\\ \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1-\mu_2} > 7\end{cases}$ соответствует условию $\mathbf{t_0} > \mathbf{t_{\alpha;\nu}}$.

Значение статистики $\mathbf{t_{o(S_p)}} = \mathbf{2,80} > \mathbf{t_{\alpha;\nu}} = \mathbf{2,02050}$ (табл.10), поэтому *отклоняется «нулевая гипотеза»,* а *альтернативная – принимается*. Вывод *заключается в том, что разница значений между оценками экспертов больше «7».*

Если нет основания предполагать, что дисперсии равны $\boldsymbol{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$ из совокупностей данных экспертизы (табл.24), то проверка гипотез будет следующая.

Таблица 24

Исходные данные результатов оценки

| Величина показателя | | | | | | | | | | | | К-во выбор-ки ***n*** | Заданные критерии | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***Y<sub></sub>*** $Y_{i-1}$ | 285 | 275 | 284 | 275 | 295 | 265 | 235 | 215 | 269 | 255 | 271 | 11 | *γ* | α |
| $Y_{i-2}$ | 220 | 235 | 265 | 245 | 190 | 195 | 284 | 255 | 293 | | | 9 | ***65*** | ***0,025*** |

***Решение.***

Средние величины выборок равны

$\bar{y}_{1(n_1)} = \frac{1}{n_1}\sum_i^n y_i = \frac{1}{11}(285 + 275 + 284 + 275 + 295 + 265 + 235 + 215 + 269 + 255 + 271) = 265{,}818$

$\bar{y}_{2(n_2)} = \frac{1}{n_2}\sum_i^n y_i = \frac{1}{9}(220 + 235 + 265 + 245 + 190 + 195 + 284 + 255 + 293) = 242{,}444$

Дисперсия $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ при $\mathbf{n_1 = 11}$ наблюдений равна:

$\sigma_1^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\bar{y}_{n_1} - y_{i(n_1)}\right)^2 = \frac{1}{11}[(265{,}818 - 285)^2 + (265{,}818 - 275)^2 + (265{,}818 - 284)^2 + (265{,}818 - 275)^2 + (265{,}818 - 295)^2 + (265{,}818 - 265)^2 + (265{,}818 - 232)^2 + (265{,}818 - 215)^2 + (265{,}818 - 269)^2 + (265{,}818 - 255)^2 + (265{,}818 - 271)^2] = 491{,}421$

Дисперсия $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ при $\boldsymbol{n_1 = 9}$ наблюдений равна:

$\sigma_2^2 = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\bar{y}_{n_2} - y_{i(n_2)}\right)^2 = \frac{1}{9}[(242{,}444 - 220)^2 + (242{,}444 - 235)^2 + (242{,}444 - 265)^2 + (242{,}444 - 245)^2 + (242{,}444 - 190)^2 + (242{,}444 - 195)^2 + (242{,}444 - 284)^2 + (242{,}444 - 255)^2 + (242{,}444 - 293)^2] = 1168{,}47$

*Проверка гипотезы по статистике* $\boldsymbol{t_o}$. Числовое значение статистики $\boldsymbol{t_{0(\gamma)}}$ равно:

$$\mathbf{t_{o(S_p)}} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_1 - \gamma}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{265{,}818 - 242{,}444 - 65}{29{,}741\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{9}}} = \mathbf{-2,979,}$$

где $\mathbf{S_p}$ – точечная дисперсия $\mathbf{S_p^2} = \frac{(n_1 - 1)\cdot S_1^2 + (n_2 - 1)\cdot S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ при не равенстве дисперсий $\boldsymbol{\sigma_1^2 = 491,42 \neq \sigma_2^2 = 1168,47}$; $\mathbf{S_1^2}$ – точечная дисперсия показателей $\mathbf{n_1=11}$; $\mathbf{S_2^2}$ – точечная дисперсия показателей $\mathbf{n_2=9;}$

$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\bar{y}_{n_1} - y_{i(n_1)}\right)^2 = \frac{1}{11-1}[(265{,}818 - 285)^2 + (265{,}818 - 275)^2 + (265{,}818 - 275)^2 + (265{,}818 - 295)^2(265{,}818 - 265)^2 + (265{,}818 - 232)^2 + (265{,}818 - 215)^2 + (265{,}818 - 269)^2 + (265{,}818 - 255)^2 + (265{,}818 - 271)^2] = 540{,}564$

$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{i=1}^{n_2}\left(\bar{y}_{n_2} - y_{i(n_2)}\right)^2 = \frac{1}{4-1}[(242{,}444 - 220)^2 + (242{,}444 - 235)^2 + (242{,}444 - 265)^2 + (242{,}444 - 245)^2 + (242{,}444 - 190)^2 + (242{,}444 - 195)^2 + (242{,}444 - 284)^2 + (242{,}444 - 255)^2 + (242{,}444 - 293)^2] = 1314{,}528$

Тогда по условию критерия отклонения $|\mathbf{t_0}| > \mathbf{t_{\alpha/2;\nu}}$ гипотеза $\begin{Bmatrix} \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 = 65} \\ \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 \neq 65} \end{Bmatrix}$ ***«отклоняется», т. к.*** *выполнено условие критерия отклонения* $|t_o| = |-2{,}979|$ *превышает табличное значение (табл.10)* $\mathbf{t_{\alpha/2;\nu} = 1,06925}$ *при заданной вероятности* **α=0,025,** где $\boldsymbol{\nu_{Sp}}$ – *степень свободы при не равенстве дисперсий* $\boldsymbol{\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2}$ **,** *определяемое по формуле*

$$\nu_{(S)} = \left(\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1+1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2+\frac{1}{n_1+1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2} - 2\right).$$

$$\nu_{(S)} = \left(\frac{\left(\frac{540{,}564}{11}+\frac{1314{,}528}{9}\right)^2}{\frac{1}{11+1}\left(\frac{540{,}564}{11}\right)^2+\frac{1}{9+1}\left(\frac{1314{,}528}{9}\right)^2} - 2\right) = 14{,}32$$

*Так как нулевая гипотеза* $\mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 = 65}$ ***«отклоняется»,*** *то целесообразна проверка двусторонних гипотез.*

В начале проверяется гипотеза $\begin{Bmatrix} \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 = 65} \\ \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1 - \mu_2} < 65 \end{Bmatrix}$ по критерию отклонения $\mathbf{t_0} < -\mathbf{t_{\alpha;\nu}}$. *Альтернативная гипотеза* $\mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1 - \mu_2} < 65$ ***«принимается»,*** так как представленный критерий отклонения гипотезы $\begin{Bmatrix} \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 = 65} \\ \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1 - \mu_2} < 65 \end{Bmatrix}$ соответствует условию $\mathbf{t_0} < -\mathbf{t_{\alpha;\nu}}$**,** а именно табличное значение (см. табл.10) $-\mathbf{t_{\alpha;\nu} = -2,13850}$ превышает значение статистики $\mathbf{(t_{o(S_p)} = -2,979)}$**.** *И, наконец, альтернативная гипотеза* $\mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1 - \mu_2} > 65$ ***«отклоняется»,*** так как критерий отклонения гипотезы $\begin{Bmatrix} \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1 - \mu_2 = 65} \\ \mathbf{H_o}:\ \boldsymbol{\mu_1 - \mu_2} > 65 \end{Bmatrix}$ *не* соответствует условию $\mathbf{t_0} > \mathbf{t_{\alpha;\nu}}$**.**

Значение статистики $\mathbf{t_{o(S_p)} = -2,979}$ (табл.10), не превышает табличного значения $\mathbf{t_{\alpha;\nu} = 2,1385}$ и**,** поэтому *не отклоняется «нулевая гипотеза»,* а *альтернативная – принимается*. И общий вывод заключается в том, что *в том, что разница значений между оценками экспертов меньше «65»* ($\boldsymbol{\mu_1 - \mu_2} < 65$).

# 5. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ЭКСПЕРТНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

***Построение математических моделей.***

*Пример оптимизации условий безопасности деятельности предприятий. Частный случай: «Оценка экономического риска»* $R_э = \frac{Э_{эф}}{D}$ *при минимизации производственного травматизма.* Показатели: технический риск – $\mathbf{R_т = \frac{N_{отк}}{N_{эксп}}}$ количество отказов технологического оборудования $\mathbf{N_{отк}}$ на единицу эксплуатации $\mathbf{N_{эксп}}$**;** индивидуальная производственная надёжность персонала – $\mathbf{R_{ин}} = \frac{\mathbf{n}_{техн(нс)}}{Т_{ССС}}$; общая производственная надёжность персонала – $\mathbf{R_{пр}} = \frac{\mathbf{n}_{техн(нс)}}{Т_{ССС}} \cdot \mathbf{1000}$ **(**частота травматизма – число несчастных случаев $\boldsymbol{n_{техн(нс)}}$ на 1000 чел персонала при $\mathbf{Т_{ССС}}$ – общий среднесписочный состав работников). Данные для расчёта приведены в табл. 25…27.

Таблица 25

Факторы, воздействующие на безопасность

| Номер п.п. | Наименование фактора | Обозначения, ед. изм. | Числовой интервал варьирование исследуемых факторов | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | -1,215 | -1 | 0 | 1 | 1,215 |
| 1 | Отчисления на обеспечение безопасности труда, % от объёма производства Vпр | ***ОБ, %*** | 0,114 | 0,2 | 0,6 | 1 | 1,086 |
| 2 | Период безотказной работы технических средств | ***Nэксп, мес*** | 0,65 | 10 | 55 | 100 | 109,35 |
| 3 | Профессиональная подготовка персонала ПрПП (время подготовки) | ПрПП, лет | 6,032 | 7 | 11,5 | 16 | 16,967 |

Таблица 26

Показатели оценки экспертов производственного травматизма (число пострадавших при технических отказах nтех(н.с)); количество технических отказов Nотк

| Номер наблюдения п.п. | Величина травматизма $\boldsymbol{n_{тех(н.с)}}$ | | | | Количество технических отказов $\boldsymbol{N_{отк}}$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Отчёт 1 | Отчёт 2 | Отчёт 3 | Средняя по трём наблюдениям | Отчёт 1 | Отчёт 2 | Отчёт 3 | Средняя по трём наблюдениям |
| 1 | 176 | 186 | 196 | 186 | 32 | 37 | 42 | 37 |
| 2 | 284 | 295 | 306 | 295 | 64 | 72 | 80 | 72 |
| 3 | 253 | 265 | 277 | 265 | 56 | 66 | 76 | 66 |
| 4 | 380 | 395 | 410 | 395 | 71 | 82 | 90 | 81 |
| 5 | 187 | 197 | 207 | 197 | 56 | 69 | 79 | 68 |
| 6 | 305 | 315 | 325 | 315 | 76 | 85 | 94 | 85 |
| 7 | 315 | 325 | 335 | 325 | 62 | 75 | 88 | 75 |
| 8 | 415 | 430 | 445 | 430 | 89 | 91 | 99 | 93 |

Окончание табл. 26

| Величина травматизма $n_{тех(н.с)}$ | | | | | Количество технических отказов $N_{отк}$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Номер наблюдения п.п. | Отчёт 1 | Отчёт 2 | Отчёт 3 | Средняя по трём наблюдениям | Отчёт 1 | Отчёт 2 | Отчёт 3 | Средняя по трём наблюдениям |
| 9 | 140 | 155 | 170 | 155 | 48 | 60 | 72 | 60 |
| 10 | 255 | 270 | 285 | 270 | 52 | 70 | 88 | 70 |
| 11 | 180 | 195 | 210 | 195 | 69 | 84 | 99 | 84 |
| 12 | 290 | 305 | 320 | 305 | 82 | 94 | 100 | 92 |
| 13 | 180 | 190 | 200 | 190 | 58 | 70 | 82 | 70 |
| 14 | 189 | 209 | 229 | 209 | 70 | 85 | 97 | 84 |
| 15 | 180 | 200 | 220 | 200 | 47 | 54 | 67 | 56 |

Таблица 27

Основные исходные величины

| Наименование показателей | Обозначения, единицы измерения | Величина показателя |
|---|---|---|
| Объём расходов для обеспечения безопасности труда | *Vрс,* тыс. руб | 250 000 |
| Накладные расходы (НР), % от объёма производства *Vпр* | *НР,%* | 0,5 |
| Общее число (случаев) эксплуатации технических средств | *Nэксп* | 200 |
| Среднесписочный состав работников | $T_{CCC}$, чел | 2500 |
| Экономическая эффективность при использовании денежных средств на обеспечение безопасности труда при оценке травм всех категорий тяжести | Ээ, тыс.руб | 111 |
| Отчисление на обеспечение безопасности (ОБ), % от *Vпр* (см. табл. 23) | max | 1 |
| | min | 0,2 |
| Период безотказной работы $N_{экспл}$ технических средств | max | 100 |
| | min | 10 |

Используя данные табл. 25–27 *формируется матрица центрального композиционного* ортогонального униформ-планирования второго порядка, при **n=2** для получения коэффициентов модели и статистического анализа данных наблюдений при оценке риска (табл. 28, 29).

Таблица 28

Предварительный расчёт показателей оценки по исследуемым факторам*

| Номер п\п | Затраты на обеспечение безопасности, тыс. руб $D=\frac{(V_{пр}-HP)\cdot ОБ\%}{100\%}$ | Совершенство технических средств (оценка отказа) $P_\tau = e^{-\frac{N_{эксп}}{\tau}}$ | Профессиональная подготовка персонала: к-во лет обучения ПрПП | Оценка риска | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Технический риск (к-во *Nотк* на ед. экспл) $\boldsymbol{R}_т = \frac{\boldsymbol{N}_{отк}}{\boldsymbol{N}_{эксп}}$ | | | Общ. пр. надёжность (*к-во НС на 1000 чел*) $\mathbf{R_{пр}} = \frac{\mathbf{n}_{техн(нс)}}{\mathrm{T_{CCC}}}\cdot \mathbf{1000}$ | | | Индивидуальный риск (к-воНС на 1чел) $\mathbf{R_{ин}} = \frac{\mathbf{n}_{\mathbf{техн(нс)}}}{\mathbf{T_{CCC}}}$ | | | Экономический риск (см. задачу) $\boldsymbol{R}_э = \frac{\boldsymbol{Э}_{\mathbf{эф}}}{\boldsymbol{D}}$ |
| 1 | 2490 | 0,37 | 16 | 0,16 | 0,19 | 0,21 | 70 | 74 | 78 | 0,07 | 0,07 | 0,08 | 0,04 |
| 2 | 498 | 0,37 | 16 | 0,32 | 0,36 | 0,40 | 114 | 118 | 122 | 0,11 | 0,12 | 0,12 | 0,22 |
| 3 | 2490 | 0,00 | 16 | 0,28 | 0,33 | 0,38 | 101 | 106 | 111 | 0,10 | 0,11 | 0,11 | 0,04 |
| 4 | 498 | 0,00 | 16 | 0,36 | 0,41 | 0,45 | 152 | 158 | 164 | 0,15 | 0,16 | 0,16 | 0,22 |
| 5 | 2490 | 0,37 | 7 | 0,28 | 0,35 | 0,40 | 75 | 79 | 83 | 0,07 | 0,08 | 0,08 | 0,04 |
| 6 | 498 | 0,37 | 7 | 0,38 | 0,43 | 0,47 | 122 | 126 | 130 | 0,12 | 0,13 | 0,13 | 0,22 |
| 7 | 2490 | 0,00 | 7 | 0,31 | 0,38 | 0,44 | 126 | 130 | 134 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,04 |
| 8 | 498 | 0,00 | 7 | 0,45 | 0,46 | 0,50 | 166 | 172 | 178 | 0,17 | 0,17 | 0,18 | 0,22 |
| 9 | 2700 | 0,16 | 11,5 | 0,24 | 0,30 | 0,36 | 56 | 62 | 68 | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,04 |
| 10 | 284 | 0,16 | 11,5 | 0,26 | 0,35 | 0,44 | 102 | 108 | 114 | 0,10 | 0,11 | 0,11 | 0,39 |
| 11 | 1490 | 0,40 | 11,5 | 0,35 | 0,42 | 0,50 | 72 | 78 | 84 | 0,07 | 0,08 | 0,08 | 0,07 |
| 12 | 1490 | 0,00 | 11,5 | 0,41 | 0,47 | 0,50 | 116 | 122 | 128 | 0,12 | 0,12 | 0,13 | 0,07 |
| 13 | 1490 | 0,16 | 17 | 0,29 | 0,35 | 0,41 | 72 | 76 | 80 | 0,07 | 0,08 | 0,08 | 0,07 |
| 14 | 1490 | 0,16 | 6 | 0,35 | 0,43 | 0,49 | 76 | 84 | 92 | 0,08 | 0,08 | 0,09 | 0,07 |
| 15 | 1490 | 0,16 | 11,5 | 0,24 | 0,27 | 0,34 | 72 | 80 | 88 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,07 |

***** ***Vпр*** *– объём продукции предприятия****;*** ***н****акладные расходы (НР), % от объёма производства Vпр; τ – время работы технических средств до «отказа»;* ***Pτ*** *– совершенство технических средств*

## 5.1. Конспект теории регрессионного анализа

По мнению эксперта-исследователя, изучаемый процесс $\boldsymbol{y}$ зависит от $\boldsymbol{n}$ независимых переменных (факторов) $x_1,\ x_2,\ x_1, \dots x_n\colon y = f(x)$. Так как вид функции отклика исследователю не известен, то функция может быть обозначена полиномом – *отрезком ряда Тейлора, в котором разлагается неизвестная функция отклика* $y = f(x)$

$$\mathrm{y} = \beta_0 + \sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} \beta_{\mathrm{i}} \mathrm{x_i} + \sum_{\mathrm{i,j}=1;\mathrm{i}<j}^{\mathrm{n}} \beta_{\mathrm{i,j}} \mathrm{x_i x_j} \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \beta_{\mathrm{i,i}} \mathrm{x_i^2} + \cdots,$$

где $\beta_{\mathrm{i}} = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial_{\mathrm{x_i}}}|_{\vec{\mathrm{x}}=0}$; $\beta_{\mathrm{i,j}} = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial_{\mathrm{x_i}}\partial_{\mathrm{x_j}}}|_{\vec{\mathrm{x}}=0}$; $\beta_{\mathrm{i,i}} = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial^2_{\mathrm{x_i}}}|_{\vec{\mathrm{x}}=0}$ – неизвестные параметры.

Измеряемые (наблюдаемые) результаты, как средняя арифметическая величина $\bar{\mathbf{y}}$ *параллельных (наблюдений) опытов являются «случайными» величинами у* **n**-*наблюдений (параллельных опытов*). Соответственно определяемые расчётом коэффициенты $b_0$, $b_i$, $b_{i,j}$, …также являются случайными величинами – *оценками параметров* $\beta_0$, $\beta_i$, $\beta_{ij}$*,…и расчётная величина функции отклика будет иметь вид*

$$\hat{y} = b_0 + \sum_i^n b_i x_i + \sum_{i,j=1;i<j}^n b_{i,j} x_i x_j \sum_{i=1}^n b_{i,i} x_i^2 + \cdots.$$

Данное уравнение оценивается методами регрессионного анализа, где должно быть показано, что *«наилучшие оценки»* параметров $\boldsymbol{\beta_0}$**,** $\boldsymbol{\beta_i}$**,** $\boldsymbol{\beta_{ij}}$**,** *обеспечивает метод наименьших квадратов.*

Термин ***«наилучшие оценки»*** параметров $\boldsymbol{\beta_0}$**,** $\boldsymbol{\beta_i}$**,** $\boldsymbol{\beta_{ij}}$**,…**означает:

1. ***«несмещённость»***: оценки $b_i$, несмещённые, если их математические ожидания равны истинным значениям параметров $M(b_i) = \beta_i$;

2. ***«состоятельность»***: оценки $b_i$ состоятельны, если они сходятся по вертикали к истинным значениям параметров $\lim_{N\to\infty} P[|b_i - \beta_i| \geq \varepsilon], \varepsilon > 0$;

3. ***«эффективность»***: несмещаемые оценки $b_i$, «если дисперсная матрица оценок параметров» меньше или равна «дисперсионной матрице» любых других оценок параметров.

Для построения модели регрессии

$$\hat{y} = b_0 + \sum_i^n b_i x_i + \sum_{i,j=1;i<j}^n b_{i,j} x_i x_j \sum_{i=1}^n b_{i,i} x_i^2 + \cdots$$

производится активный или пассивный ***факторный эксперимент.***

***В активном факторном эксперименте*** исследователь работает одновременно со всеми переменными $\boldsymbol{x_i}$, задавая их значения в каждом опыте по заранее заданному плану – *«матрицей планирования».*

***В пассивном факторном эксперименте*** исследователь не вмешивается в процесс, а только фиксирует (записывает) значения всех переменных $\boldsymbol{x_i}$ и соответствующие им $\boldsymbol{y}_i$ (возможны наблюдения в соответствии с заранее составленным планом – *«матрицей планирования»).*

В обоих случаях целесообразно использование ЭВМ.

***Основные допущения регрессионного анализа***

1. Входные переменные $\mathbf{x_1}$**,** $\mathbf{x_2}$**,…** $\mathbf{x_n}$ задаются с пренебрежимо малым отклонением по сравнению с отклонением определения функции отклика ***y.***

2. При повторении **с-раз** опытов в одной точке *«факторного пространства»* ($\mathbf{x_i}$**,** *где все* $\mathbf{x_i}$ *фиксированы*) образуется выборка независимых нормально распространённых случайных значений отклика $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{y}_3$, … $\boldsymbol{y}_n$ с параметрами распределения $\bar{y}, \sigma^2, \{\bar{y}\}$.

3. В исследуемом объёме факторного пространства дисперсия $\sigma^2\{\bar{y}\}$ не зависит от координат: $S^2\{y_1\} = S^2\{y_2\} = S^2\{y_3\} = \cdots S^2\{y_n\} = \sigma^2\{y\}$.

4. Каждая из $\mathbf{x_i}$-величин не является линейной комбинацией остальных переменных.

5. Погрешность задания каждого $\mathbf{x_i}$ меньше интервала варьирования $\Delta x_i$ от опыта (наблюдения) к опыту.

***Основные положения метода наименьших квадратов***. Измерен отклик **y** в **1, 2, 3, …u,…N** точках факторного пространства ($\mathbf{x_i}$), **i=1,2,3, …n.** Натуральные значения координат $\mathbf{x_i}$ для дальнейших расчётов заменяются координатами значениями $\mathbf{X_i}$ нулевой размерности:

- верхний уровень **(max** $\mathbf{x_i}$**)**$\rightarrow$ $\mathbf{X_i=+1}$**,**
- нижний уровень **(min** $\mathbf{x_i}$**)**$\rightarrow$ $\mathbf{X_i=-1}$**,**
- основной уровень $\left(\frac{\max x_i + \min x_i}{2}\right) \rightarrow X_i = 0$ и т.д.

Матрица условий и результатов факторного эксперимента для рассматриваемого случая представлена в табл. 30. «**Фиктивная**» переменная $\mathbf{X_0=+1}$ введена в таблицу для единообразия записи последующих вычислений. Часть этой таблицы (координаты $\mathbf{X_i}$ всех N опытов) называют **матрицей планирования**. А полученная по данным табл. 30, модель имеет вид полинома второй степени

$$\hat{y} = b_0X_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots b_nX_n + b_{1-1}X_1^2 + b_1b_2X_{1-1} \dots b_{n-n}^2X_{n-n}^2 .$$

Сумма квадратов отклонений расчётных $\mathbf{\hat{y}_u}$ от опытных (наблюдаемых) $\mathbf{y_u}$ по всем **N** опытам будет иметь вид

$$\Phi = \sum_{u=1}^{N} |\hat{y} - y_u|^2 .$$

Наилучшие оценки параметров $\boldsymbol{b_i}$ соответствуют ***минимуму*** этой суммы квадратов и находятся из системы ***нормальных уравнений ГАУСА***

$$\frac{\partial\Phi}{\partial b_i} = 0, \quad i=1, 2, 3, \dots n.$$

Величина звёздного плеча $\boldsymbol{\gamma}$ равна *1,00 для n =2, 1,215* для *n=3 и 1,414* для *n=4 (где n – число исследуемых факторов)*. Ортогональность плана достигается специальным преобразованием квадратных переменных и выбора величины плеча $\boldsymbol{\gamma}$**.** В самом деле, если $X_i = \pm 1$, то $X_i^2 = +1$ и столбцы $X_0$ и $X_i^2$ не ортогональны. Поэтому при расчёте коэффициентов регрессии в колонку $X_i^2$ записывается преобразованная переменная

$$X'_{i,u} = X_{i,u}^2 - \frac{\sum_{u=1}^{N} X_{i,u}^2}{N} = X_{i,u}^2 - \widetilde{X}_{i,u}^2 ,$$

Например, при n=2 вместо $X_1^2$ записывается: в первом опыте $X'_{1,1} = (-1)^2 - 6/9 = 1/3$, и т.д., а в девятом опыте $X'_{1,9} = 0 - 6/9 = -2/3$ и т.д.

Таблица 30

Матрица данных наблюдений*

3

D тыс.руб

P(t)

ПрПП.лет

498 2490

$4.54\cdot10^{-5}$ $3.68\cdot10^{-1}$

7 16

5

Y-1-$R_T$

Y-2-*Rпр*

Y-3-*Rин*

Y-4-$R_Э$

Y-5-Nнс

3 3 3 3 3

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 01 01 01 | 1,60 | 0,19 | 0,21 | 70,4 | 74,4 | 78,4 | 0,07 | 0,07 | 0,08 | 0,04 | 0,09 | 0,00 | 176 | 186 | 196 |
| –1 01 01 | 0,32 | 0,36 | 0,40 | 114 | 118 | 122 | 0,11 | 0,12 | 0,12 | 0,22 | 0,34 | 0,10 | 284 | 295 | 306 |
| 01 –1 01 | 0,28 | 0,33 | 0,38 | 101 | 106 | 111 | 0,10 | 0,11 | 0,11 | 0,04 | 0,09 | 0,00 | 253 | 265 | 277 |
| –1 –1 01 | 0,36 | 0,41 | 0,45 | 152 | 158 | 164 | 0,15 | 0,16 | 0,16 | 0,22 | 0,34 | 0,10 | 380 | 395 | 410 |
| 01 01 –1 | 0,28 | 0,35 | 0,40 | 74,8 | 78,8 | 82,8 | 0,07 | 0,08 | 0,08 | 0,04 | 0,09 | 0,00 | 187 | 197 | 207 |
| –1 01 –1 | 0,38 | 0,43 | 0,47 | 122 | 126 | 130 | 0,12 | 0,13 | 0,13 | 0,22 | 0,34 | 0,10 | 305 | 315 | 325 |
| 01 –1 –1 | 0,31 | 0,38 | 0,44 | 126 | 130 | 134 | 0,13 | 0,13 | 0,13 | 0,04 | 0,09 | 0,00 | 315 | 325 | 335 |
| –1 –1 –1 | 0,45 | 0,46 | 0,50 | 166 | 172 | 178 | 0,17 | 0,17 | 0,18 | 0,22 | 0,34 | 0,10 | 415 | 430 | 445 |
| 01 00 00 | 0,24 | 0,30 | 0,36 | 56 | 62 | 68 | 0,06 | 0,06 | 0,07 | 0,04 | 0,08 | 0,00 | 140 | 155 | 170 |
| –1 00 00 | 0,26 | 0,35 | 0,44 | 102 | 108 | 114 | 0,10 | 0,11 | 0,11 | 0,39 | 0,49 | 0,29 | 255 | 270 | 285 |
| 00 01 00 | 0,35 | 0,42 | 0,50 | 72 | 78 | 84 | 0,07 | 0,08 | 0,08 | 0,07 | 0,15 | 0,0004 | 180 | 195 | 210 |
| 00 –1 00 | 0,41 | 0,47 | 0,50 | 116 | 122 | 128 | 0,12 | 0,12 | 0,13 | 0,07 | 0,15 | 0,0004 | 290 | 305 | 320 |
| 00 00 01 | 0,29 | 0,35 | 0,41 | 72 | 76 | 80 | 0,07 | 0,08 | 0,08 | 0,07 | 0,15 | 0,0004 | 180 | 190 | 200 |
| 00 00 –1 | 0,35 | 0,43 | 0,49 | 75,6 | 83,6 | 91 | 0,08 | 0,08 | 0,09 | 0,07 | 0,15 | 0,0004 | 189 | 209 | 229 |
| 00 00 00 | 0,24 | 0,27 | 0,34 | 72 | 80 | 88 | 0,07 | 0,08 | 0,09 | 0,07 | 0,15 | 0,0004 | 180 | 200 | 220 |

***** Функции отклика: Y-1-$R_T$ – *технический риск;* Y-2-*Rпр – общая производственная надёжность;* Y-3-*Rин – индивидуальный риск;* Y-4-$R_Э$ – *экономический риск;* Y-5-*Nнс – количество НС в натуральном исчислении*

В приведённой матрице (табл. 30) представлены все возможные сочетания полного факторного эксперимента до $2^3$. В матрице приведены все возможные сочетания 2, и 3 факторов. *Для n=2, число опытов равно $2^2=4+k$, где k равно числу звёздных точек $\gamma$ и один опыт посредине; для n=3, число опытов $N=2^3=8+k$; (для данного случая число $k=\gamma+1$, где $\gamma=6$, тогда $N=8+7=15$);*

*Подобные планы эксперимента называют полным факторным планом второго порядка.*

Алгоритм расчёта при получении математических моделей плана типа $2^n$:

1. Кодирование переменных $X_i = \frac{x_i - 0{,}5(\max\ x_i + \min\ x_i)}{0{,}5(\max\ x_i - \min\ x_i)}$;

2. Оценка дисперсии воспроизводимости на основании параллельных опытов $S_u^2\{y\} = \frac{\sum_{l=1}^{c} |y_{u,l} - \bar{y}_u|^2}{c-1}$ при $\nu = c - 1$, $\nu$ – число степеней свободы. Каждый из ***N*** опытов повторяется $c > 1$ раз и повторяется в центре эксперимента $X_i = 0$,

3. Проверка однородности дисперсии воспроизводимости $G_{max} = \frac{\max S_u^2\{y\}}{\sum_{u=1}^{N} S_u^2\{y\}}$.

Полученные значения $G_{max}$ сравниваются с критическим значением критерия $\boldsymbol{G_{\nu 1,\nu 2,\alpha}}$ (справочные таблицы критических значений ***G*** – критерия наибольшей эмпирической дисперсности к сумме эмпирических дисперсии; для $\alpha=0{,}05$) для $\nu_1=c-1$, $\nu_2=N(c-1)$ и уровнем значимости $\alpha$. Если $\boldsymbol{G_{max} < G_{\nu 1,\nu 2,\alpha}}$, дисперсии считаются однородными с надёжностью $\boldsymbol{(1-\alpha)}$. *Для дальнейших расчётов принимается оценка дисперсии воспроизводимости*

$$\mathbf{S^2\{y\} = \frac{\sum_{u=1}^{N} S^2\{y_u\}}{N}}, \text{ при } \boldsymbol{\nu = n(c-1)}$$ т.*е. дисперсия усредняется.*

Если опыты повторялись только в центре эксперимента, то оценка дисперсии воспроизводимости будет следующей

$$S^2\{y\} = \frac{\sum_{u=1}^{N} |y_i - \bar{y}|^2}{c-1}, \text{ при } \nu = N(c-1) .$$

4. Расчёт коэффициентов модели производятся по формулам

$$b_0' = \frac{\sum_{u=1}^{N} y_u}{N};\ b_i = \frac{\sum_{u=1}^{N} X_{i,u} \times y_u}{\sum_{u=1}^{N} X_{i,u}^2};\ b_{i,j(i \neq j)} = \frac{\sum_{u=1}^{N} X_{i,u} \times X_{j,u} \times y_u}{\sum_{u=1}^{N} \left(X_{i,u}^2 \times X_{j,u}^2\right)^2};$$

$$b_{i,i}=\frac{\sum_{u=1}^{N}X'_{i,u}\times y_u}{\sum_{u=1}^{N}\left(X'_{i,u}\right)^2};\quad b_0=b'_0-\sum\widetilde{X}_i^2\times b_{i,i}=b'_0-\frac{\sum_{u=1}^{N}X_{i,u}^2}{N}\times b_{i,i}\ .$$

5. Оценка дисперсии определения коэффициентов модели (дисперсии коэффициентов различны)

$$S^2\{b_i\}=\frac{S^2\{y\}}{c\cdot\sum_{u=1}^{N}X_{i,u}^2},\ S^2\{b_{i,j(i\neq j)}\}=\frac{S^2\{y\}}{c\cdot\sum_{u=1}^{N}\left(X_{i,u}\cdot X_{j,u}\right)^2},\ \text{при } \nu=N(c-1);$$

$$S^2\{b_{i,i}\}=\frac{S^2\{y\}}{c\cdot\sum_{u=1}^{N}\left(X'_{i,u}\right)^2},\ S^2\{b_0\}=S^2\{b'_0\}+S^2\{b_{i,i}\}\cdot\left(\widetilde{X}_i^2\right)^2=\frac{S^2\{y\}}{c\cdot\sum_{u=1}^{N}\left(X'_{i,u}\right)^2},\nu=N(c-1)$$

6. Оценка критического значения коэффициента, где устанавливается доверительный интервал $\Delta b_i=\pm t_{\nu,\alpha}\sqrt{\sum_{u=1}^{N}X_{i,u\cdot}^2\}}\cdot S\{y\}$,

где $t_{\nu,\alpha}$ – табличные значения *t* критерия Стьюдента с $\nu=N-1$;
α – уровень значимости (см. табличные критических значений критерия *G*). Если $|\Delta b_i|>|b_i|$, коэффициент $b_i$ признаётся незначимым.

7. Расчёт дисперсии неадекватности модели $S_{ad}^2=S_1^2=\frac{\sum_{u=1}^{N}|y_u-\hat{y}_u|^2}{N-d}$, характеризующая разброс экспериментальных $y_u$ относительно $\hat{y}_u$, предсказанных $\hat{y}_u$ по уравнению регрессии. Число степеней свободы дисперсии $S_0^2$ равно $\nu_1=N(c-1)$, а дисперсии $S_1^2$ равно $\nu_2=N-d$, где $d$ число членов уравнения регрессии.

8. Составление и оценка значимости отношения дисперсий неадекватности и воспроизводимости (табл. значения 11). Для проверки адекватности уравнения регрессии составляется дисперсия неадекватности $S_{ad}^2$ с дисперсией воспроизводимости

$$S^2\{y\}: F={S_{ad}^2}/{S^2\{y\}}.$$

Гипотезе об адекватности уравнения регрессии соответствует условие: $F\leq F_{\nu_1,\nu_2,\alpha}$, где $F_{\nu_1,\nu_2,\alpha}$ – критическое значение *F*-критерия (см. таблицу критериев 11); $\boldsymbol{\alpha}$ – уровень значимости, при числе степеней свободы $\nu_1=N(c-1)$ и $\nu_2=N-d$.

Во многих задачах исследователь *априорно предполагает,* что при моделировании процесса (процессов) достаточно ограничится линейной моделью или моделью с линейными членами и частью возможных взаимодействий. Особенно типичная такая ситуация для многофакторных (более 4-х) задач, где полиномом второй степени обычно удаётся описать почти стационарную область, где предположительно находятся экспериментальные значения. Здесь уместно отметить следующее:

– чем больше величина $n$, тем меньше обычно объём априорной информации;

– маловероятно влияние тройных и более взаимодействий факторов;

– на первой стадии многофакторного эксперимента обычно только намечается направление движения к оптимуму и достаточно аппроксимировать исследуемую часть поверхности отклика $y\ (x_i)$ плоскостью

$$\hat{y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 \dots + b_n \cdot X_n$$

– с ростом ***n*** быстро возрастают сроки и стоимость эксперимента.

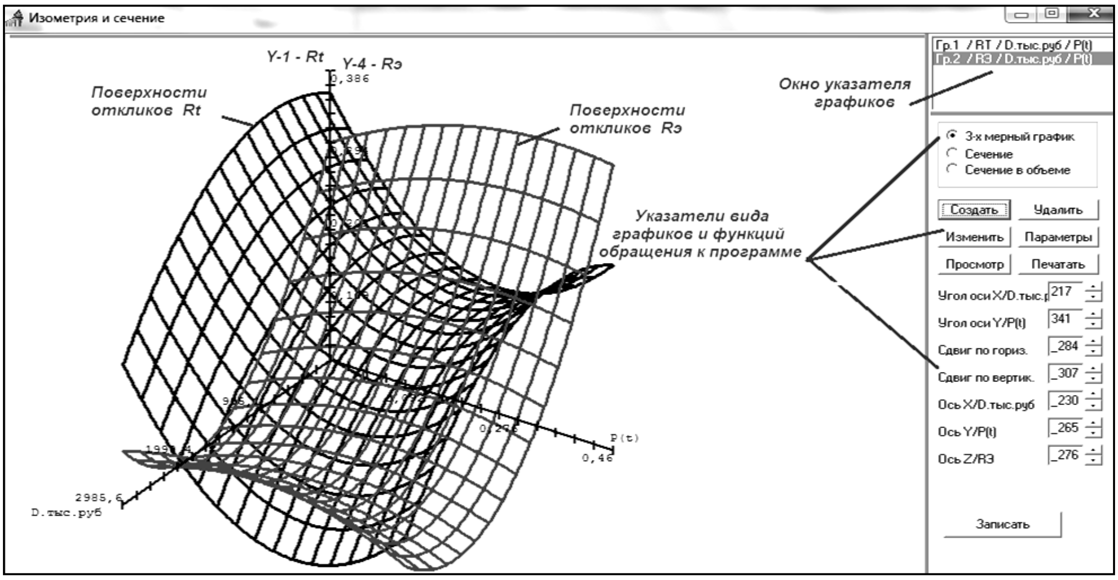


Рис. 23. Фрагмент графической интерпретации.
Окно «изометрия и сечение» – поверхности откликов **Y-1** и **Y-4**

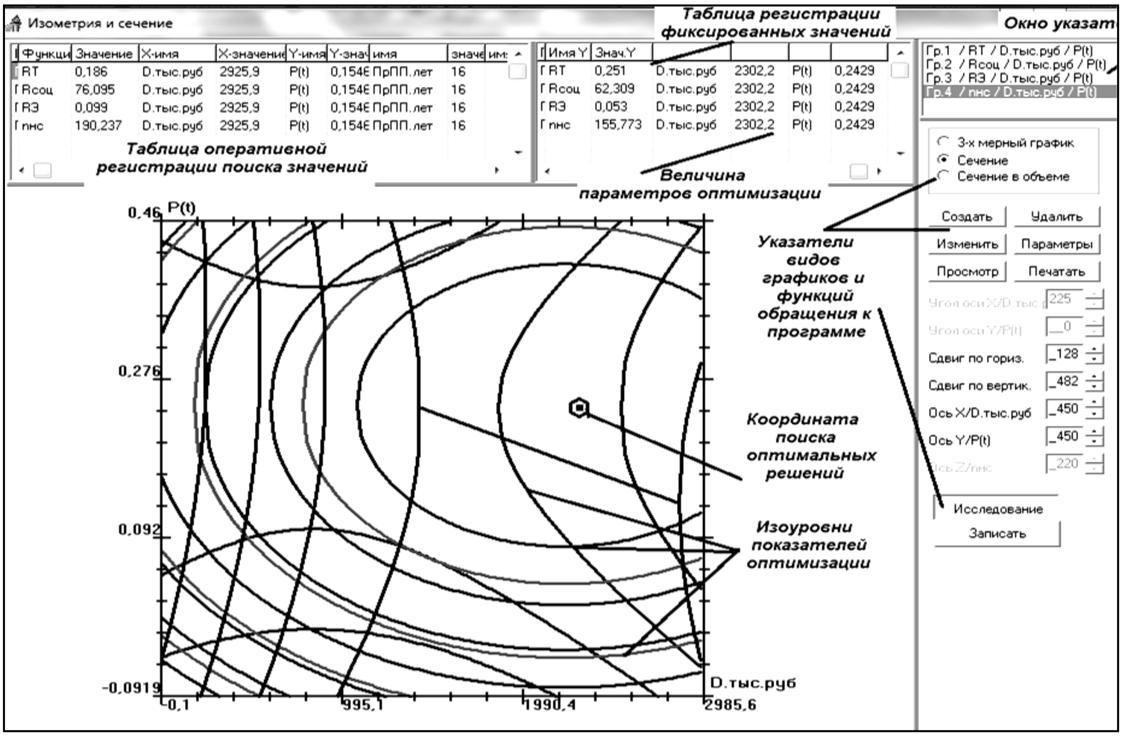


Рис. 24. Фрагмент графической интерпретации – номограмма *«изоуровней»* поверхностей откликов критериев оценки. Окно «изометрия и сечение» – спроецированные *«изоуровни»* на плоскость с координатами $\mathbf{X_1}$ **и** $\mathbf{X_2}$ поверхностей откликов критериев **Y-1, Y-2, Y-3, Y-4, Y-5**

Учитывая приведенные условия возможно обращение к программе «Plan.ex.2015» (рис. 23) получения математических моделей показателей оптимизации оценки производственного травматизма (табл.24) – **Y-1, Y-2, Y-3, Y-4, Y-5.** По графическим интерпретациям моделей (рис. 23 и 24) производится поиск величин критериев и оценка показателей.

***Соответствующие показатели оптимизации следующие:*** при прогнозировании относительно небольшого количества травмированных людей (приоритет травматизма предпочтительнее, по отношению к другим показателям) $\boldsymbol{n_{(тех\ Н.С)}}$ *=155…156 человек,* и надёжности технических средств $\boldsymbol{P_{(t)}}$***=0,2429*** необходимо запланировать затраты в размере ***D=2302*** тыс. руб. Показатели рисков, в рассматриваемом варианте оптимизации, будут иметь следующие значения (рис.24):

*технический риск* Y-1-$\boldsymbol{R_m}$ ***= 0,251…0,256;***

*общая производственная надёжность* Y-2-*Rпр* ***=2302…2308;***

*экономический риск* $\boldsymbol{R_э}$ ***=0,053…0,055.***

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

## Основной список

1. Гурлев В.Г. Статистика. Математическое моделирование и принятие управленческих решений: учебное пособие / В.Г. Гурлев, Т.С. Хомякова. – Челябинск: Издательский центр ЮурГУ, 2012. – 96 с.

## Дополнительный список

2. Монтгомери Д.К. Планирование эксперимента и анализ данных. – Л.: Судостроение, 1980. – 384 с.